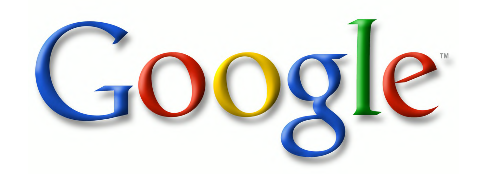


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

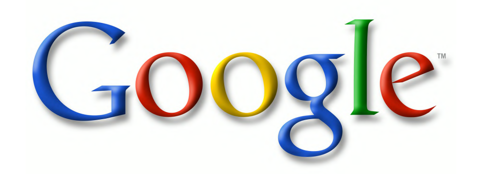
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

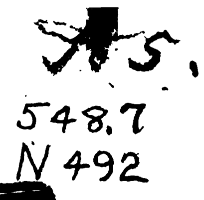
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

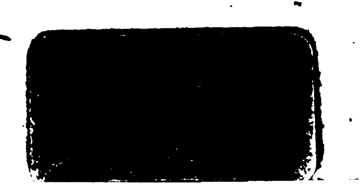
Über Google Buchsuche

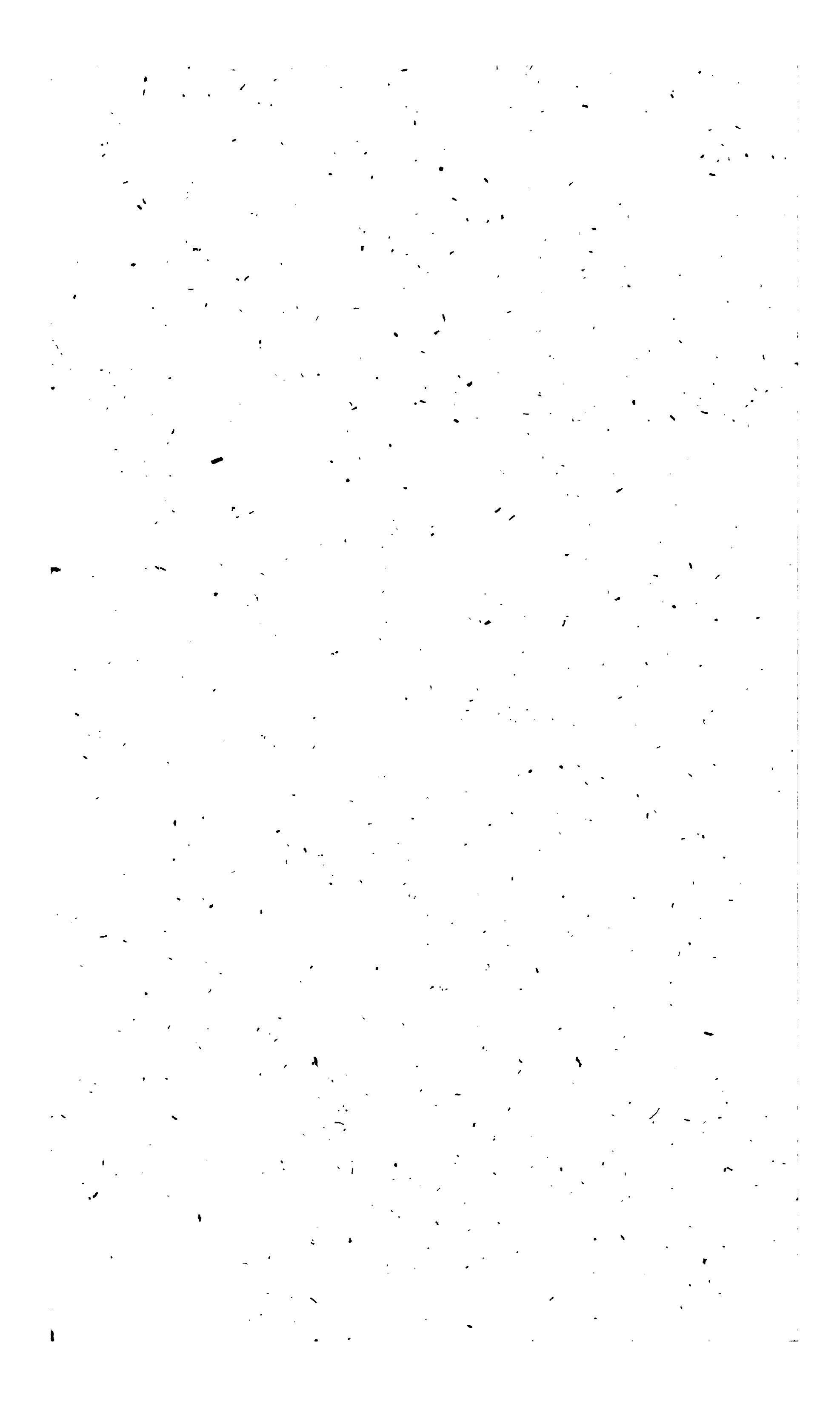
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter http://books.google.com durchsuchen.


C.1
548.7 .N492
Beitrege zur krystallo
Stanford University Libraries
3 6105 046 511 940


AS. 548.7 N492


LELAND·STANFORD·JVNIOR·VNIVERSITY





Beiträge

zur

Krystallonomie.

Von

F. E. Neumann.

STANFORD LIBRARY

Erstes Heft.

Mit 12 Tafeln in Steindruck.

Berlin und Posen.
Bei Ernst Siegfried Mittler.
1823.

202949

Vorrede.

In einer Reihe zwangloser Hefte gedenke ich dem mineralogischen Publikum die Resultate meiner krystallographischen Arbeiten zu übergeben. Ich glaubte den Anfang machen zu müssen mit der Auseinandersetzung der graphischen Methode, deren ich mich fernerhin in meinen Darstellungen bedienen werde, und die, wie ich hoffe, den Beifall jedes Krystallforschers erhalten wird. Bei der jetzt entstehenden Mannigfaltigkeit der krystallographischen Terminologien in Deutschland, kann eine Methode, die frei von jeder subjectiven Ansicht und Vorstellung ist, und zugleich dasjenige, was allen diesen verschiedenen Terminologien zum Grunde liegt, enthält, nicht überflüssig sein: — und ich wage zu hoffen, daß die verschiedenen Richtungen der Betrachtungen unserer Krystallographen in dieser Methode sich wieder vereinigen werden. Es sind in dieser graphischen Darstellung eben so leicht die Haüyschen Bezeichnungen der verschiedenen Glieder eines Krystallsystems, als die vom Herrn Prof. Mohs und die vom Herrn Prof. Hausmann (welche beide im Wesentlichen nicht verschieden von einander sind), und vom Herrn Prof. Hessel ꝛc. zu lesen.

Zum Grunde liegt dieser Methode eine Ansicht, die in spätern Arbeiten erst sich geltend zu machen versuchen wird, und von der ich überzeugt bin, daß sie eben so sehr dem physikalischen Verständniß der krystallinischen

Struktur und Gestaltung dienen wird, als sie die Möglichkeit einer dynamischen Construction derselben in sich trägt, nämlich die Ansicht, die sich davon lossagt, die Krystallflächen als Etwas ursprünglich Seiendes im Krystall zu betrachten, die diese nur als die Erscheinung, das Resultat der Thätigkeiten in den Flächenrichtungen (d. i. in den auf den Flächen senkrecht stehenden Richtungen) betrachtet.

Deshalb glaubte ich bei der Auseinandersetzung der Methode zugleich die allgemeinen krystallonomischen Gesetze entwickeln zu müssen, um zu zeigen, wie diese alle sich unmittelbar auf die Richtungen beziehen. — Zugleich ist in diesem allgemeinen Theil Manches entwickelt, um mir bei den folgenden Lieferungen zur Basis zu dienen, worauf ich bei den speciellen Untersuchungen verweisen kann, zur Vermeidung unnützer Wiederholung.

Hieran wird sich eine Reihe Untersuchungen anschließen, theils über den Entwickelungsgang der zwei- und eingliedrigen und der ein- und eingliedrigen Systeme im Allgemeinen, theils über die einzelnen Systeme selbst, kritisch den Grad von Evidenz beleuchtend, den ihre Deutung in sich trägt.

Nach diesen mehr kritischen Untersuchungen sollen alle Resultate krystallographischer Beobachtungen, so weit sie zur öffentlichen Kunde gekommen sind, in der graphischen Methode dargestellt werden. Durch sie ist es möglich geworden, in einigen Bogen bildlicher Darstellungen und in einigen Bogen erläuternden Textes alles zu geben, was die Haüysche Krystallographie in ihren voluminösen Bänden nach Abstreifung der atomistischen und hypothetischen Vorstellungen an Thatsachen in sich hat, und was andere Beobachter seitdem geleistet haben. Die

liberalste Zusicherung der Mittheilung und Unterstützung des Hrn. Prof. Weiß hierbei, läßt den Leser die möglichste Vollständigkeit in den Angaben des Beobachteten erwarten, welche Vollständigkeit diese Beiträge auch fernerhin zu erhalten sich bestreben werden, indem alles, was später bekannt wird, in den spätern Heften jedesmal nachgeliefert werden soll, so daß diese Beiträge zugleich ein Repertorium aller krystallographischen Beobachtungen sein werden. Mit dem zweiten Hefte, das noch in diesem Jahre erscheinen wird, soll diesem Versprechen genügt sein.

Die zweite Abhandlung dieses Heftes, die erste von denen, die die zwei- und eingliedrigen Systeme betreffen, steht in der nächsten Verbindung mit der folgenden, deren Gegenstand die Entwickelung dieser Systeme in Bezug auf ihre Grundrichtungen ist, so wie diese sich mit der Entwickelung dieser Systeme in Bezug auf ihren Zonenzusammenhang beschäftigt. Sie ist wesentlich polemisch gegen die Darstellung des Hrn. Prof. Mohs, und ich finde in dieser Hinsicht für nöthig, zu bemerken, daß das Manuscript dieses Heftes schon im Sommer vorigen Jahres vollendet vor mir lag, ehe der Grundriß der Mineralogie von Hrn. Mohs erschien; denn es scheint, daß Hr. Mohs in diesem sehr schätzbaren Werke den Weg gehen wird, den seine Methode konsequenterweise erfordert, daß er es aufgiebt, alle zwei- und eingliedrigen Systeme als hemiprismatische zu betrachten, wozu ihn das Studium des Zonenzusammenhanges, das leitende Princip seiner Methode auch nicht führen konnte. Daß Hr. Mohs diese Systeme als hemiprismatische bezeichnete, war eine Inconsequenz, deren Folge der Streit war, der, seitdem ich diese Abhandlung schrieb, zwischen den Meistern der Krystallographie selbst zur Sprache ge-

kommen ist, und der mit dem jetzigen Schritte des Hrn. Prof. Mohs mir völlig entschieden zu sein scheint.

Einige Anmerkungen in dieser Abhandlung, die sich auf die Bezeichnungsmethode des Hrn. Mohs beziehen, bitte ich nicht so zu verstehen, als mißbilligte ich dieselbe überhaupt; ich glaubte nur auf die Willkührlichkeiten in derselben bei dieser Gelegenheit aufmerksam machen zu müssen. Ich halte jedoch diese Bezeichnungsart von allen denen, deren Basis der äußere Zusammenhang durch die Zonen sein soll, für die gelungenste, und finde es in allen den Fällen, wo die Aufgabe, die Bezeichnungen der Glieder zu den Grundrichtungen zu finden, noch nicht gelöset ist, sehr zweckmäßig, sich derselben zu bedienen, — nur manche Nebenvorstellungen, wie z. B. die der Reihen, halte ich hierbei für unwesentlich, ich sehe in ihnen nur eine mathematische Abstraction, und finde sie nicht in der Natur gegeben.

Inhalt.

Seite

Einleitung.

Das krystallographische Studium bezieht sich im Allgemeinen auf zwei in der Betrachtung völlig geschiedene Fragen; es bezieht sich einmal auf den Zusammenhang der verschiedenen Glieder desselben Krystallsystems unter einander, und dann auf die Erforschung der Individualität, der trennenden Eigenthümlichkeit in jedem der verschiedenen Krystallsysteme. Ehe diese zwei Fragen in ihrer Bestimmtheit auftreten konnten, mußte sich der Begriff eines Krystallsystems entwickeln. Ein Krystallsystem ist der Inbegriff von Gestaltungen, denen eine gemeinschaftliche Einheit zu Grunde liegt. Es mußte also erst erkannt werden, worin diese Einheit in der Mannigfaltigkeit der Gestaltungen zu suchen sei, wenn bei der Festsetzung eines eigenthümlichen, in sich geschlossenen Krystallsystems nicht ein dunkeles Naturgefühl mehr als ein in sich klarer Begriff leiten sollte. Verwirrung mancherlei Art konnte nur entstehen, wenn das, was ein unbestimmtes Gefühl ahnend unbestimmt hingestellt hatte, zur Basis der weiter gehenden Reflexion wurde, wenn die Hauyschen Decrescenz-Gesetze den Begriff der Einheit eines Krystallsystems darstellen sollten; — er stand so jeder mathematischen Willkühr offen, der die empirische Forschung nur schwache Grenzen setzen konnte. — Der Uebersetzer der französischen Krystallographie, Herr Prof. Weiß, diesen Vorwurf der Hauyschen Darstellung auf das Bestimmteste fühlend, erkannte den Zusammenhang der verschiedenen Glieder eines und desselben Systems in ihrer Abhängigkeit, wie diese sich ausspricht in ihrem Bestimmtwerden durch Zonen. Das Studium der Abhängigkeit eines Gliedes von andern Gliedern, in denen die Zonenrichtungen schon gegeben waren, die das Glied bestimmten, gewährte einen klaren

Begriff der Einheit eines Krystallsystems, und führte zu gewissen Anfangspunkten, von denen alle sich einsetzende Abhängigkeit ausging, zu gewissen Mittelpunkten, an welche die mannigfaltigen Gestaltungen in verschiedenen Richtungen vermöge ihrer Zonenabhängigkeit sich anschlossen. Diese Anfangspunkte traten als primäre Gestalten an die Stelle der Hauyschen Primitivformen; sie dienten keiner Hypothese zur Basis, waren durch keine einseitige Deutung der Strukturverhältnisse gegeben, sondern waren durch die unbefangene Naturbeobachtung als Ausgangspunkte des in der Abhängigkeit erkannten Zusammenhanges der verschiedenen Glieder gegeben. Der Inbegriff von Gestaltungen, die ihre Bestimmung erhalten sowohl durch die in den primären Gestalten unmittelbar gegebenen Zonenrichtungen, als durch die, welche in den durch diese schon bestimmten Gestalten, und in den von diesen auf dieselbe Weise sich weiter entwickelnden Gestalten sich einsetzen, ist ein Krystallsystem.

So wurde das Studium des Zusammenhanges in einem und demselben Systeme, der auf ganz allgemeinen, nicht in dem bestimmten Systeme ruhenden Verhältnissen gegründet ist, auf die Beobachtung ganz allgemeiner Verhältnisse gewiesen, auf die Beobachtung der gemeinschaftlichen Richtungen, wodurch die verschiedenen Glieder in ihrem Zusammenhange erscheinen, d. i. auf die Beobachtung des Parallelismus der Kanten. Das System konnte unabhängig von allen Winkelmessungen in seiner Gliederung fest begründet werden.

Jetzt trat die zweite Frage mit allen ihren Anforderungen nach der Individualität, nach der bestimmenden Eigenthümlichkeit jedes besondern Krystallsystems auf eine in sich klare Weise hervor. Es schloß sich dieser Frage zunächst die Untersuchung der primären Formen an, als Repräsentanten der Richtungen, die der Entwickelung aller möglichen Gestaltungen zu Grunde lagen. Diese Untersuchung erkannte in vielen derselben ein Gemeinschaftliches, wodurch viele unter einander sich eben so sehr näherten, als sie von den andern scharf getrennt wurden. Es

ergab sich der Begriff einer höhern Einheit mehrerer Krystallsysteme, der Begriff der Abtheilungen derselben:

1) Das reguläre System, dessen Primärform das reguläre Octaeder ist.

2) Die viergliedrigen Systeme, deren Primärformen Quadratoctaeder sind.

3) Die zwei- und zweigliedrigen Systeme, deren Primärformen Rhombenoctaeder sind.

4) Die zwei- und eingliedrigen Systeme, deren Primärformen doppelt dreiseitige Pyramiden sind, in welchen zwei Flächen gleich geneigt gegen die dritte sind, aber verschieden gegen einander *).

5) Die ein- und eingliedrigen Systeme, deren Primärformen doppelt dreiseitige Pyramiden mit dreierlei Neigungen in den drei Endkanten sind **).

6) Die drei- und die sechsgliedrigen Systeme, deren Primärformen Rhomboeder oder Dihexaeder sind.

Jetzt war die Anforderung, in jedem der Systeme in den verschiedenen Abtheilungen den Character der Eigenthümlichkeit, den Ausdruck der Besonderheit aufzufinden.

Bereits im Jahre 1809 erschienen vom Prof. Weiß zwei Dissertationen ***), deren Tendenz war, dieser Anforderung zu genügen. Derselbe unterschied damals schon die so eben ange-

---

*) In der zweiten Abhandlung dieses Heftes ist die Beziehung und Zonenabhängigkeit aller Glieder eines zwei- und eingliedrigen Systems von einer solchen Pyramide nachgewiesen; es ist dort gezeigt, wie die Betrachtung des Zonenzusammenhanges auf sie als die einfachste Gestalt führt. Zugleich ist aber auch eine naturgemäße Beziehung der Glieder auf ein ein- zwei- und einkantiges Octaeder, d. i. auf ein schiefes Octaeder, erörtert.

**) Die Belege, daß die Verfolgung des Zonenzusammenhanges hier auf eine solche Pyramide, als den einfachsten Ausgangspunkt, führt, und daß von ihr aus derselbe Gang der Entwickelung statt findet, wie der bei der zwei- und einkantigen auseinandergesetzte ist, behalte ich mir vor, am System des Axinit, an dem ein- und eingliedrigen Feldspath u. s. w., im folgenden Hefte zu geben.

***) De indagando formarum crystallinarum charactere geometrico principali. Lips. 1809.

gebenen Abtheilungen bis auf wenige Modificationen, die ich anzugeben für nöthig erachte, als Data der historischen Entwickelung der Krystallographie. — Die zwei- und eingliedrigen Systeme wurden in diesen Abhandlungen theils in die Abtheilung der zwei- u. zweigliedrigen Systeme gestellt, (z. B. das System der Hornblende, des Augit u. s. w.), theils wurde ihnen ein schiefes Octaeder (octaedron pyramidibus obliquis, non rectis, basi rectangula) als Primärform bestimmt. Letztere sowohl als die ein- und eingliedrigen Systeme wurden von den übrigen vier Abtheilungen getrennt, und ihre nähere Erörterung bei einer andern Gelegenheit wurde versprochen. — Beides, die Vereinigung der zwei- und eingliedrigen Systeme mit den zwei- und zweigliedrigen, und ihre Trennung von diesen durch die Feststellung einer besondern Primärform für sie, war wahr, war in der Beobachtung gegründet, das vergleichende Studium des Zusammenhanges führt auf Beides. Dieses Räthsel der Doppelsinnigkeit konnte nicht mehr durch die Beobachtung des äußern Zusammenhanges gelöst werden, deren Ergebnisse finden hier ihre Grenzen; es konnte nur gehoben werden durch ein tieferes Eindringen in den Grundcharakter der verschiedenen Systeme. — In den Schriften der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin, in den Jahrgängen von 1814 u. 1815 ist die Abhandlung des Prof. Weiß, worin über die Natur der zwei- und eingliedrigen Systeme und der ein- und eingliedrigen das wahre Verständniß gegeben wurde, welches dadurch erst möglich ward, daß der Grundcharakter jedes Systems nicht mehr in gewissen Eigenschaften seiner Primärform gesucht wurde, daß die Untersuchung beim Gegebensein einer Primärform sich nicht beruhigte, sondern daß diese selbst erst ihre Bedeutung in ihrer Beziehung zu gewissen Richtungen im Raume fand, so daß das Verhältniß dieser Richtungen, die nicht einer einzelnen Form, nicht der Primärform zu Grunde liegen, sondern der ganzen Mannigfaltigkeit und Möglichkeit von Gestaltungen im Kreise eines Systems, den Grundcharakter eines jeden Systems bestimmte.

Die Bedeutung und die Stellung der oben angegebenen Abtheilungen sind das Resultat dieser bedeutendsten Arbeit in der Krystallonomie.

I. Die Systeme, die auf dem Verhältniß dreier unter einander rechtwinkliger Richtungen beruhen:

1) Alle drei Richtungen sind einander gleich. Reguläres System. Gleichaxiges System.

Hemiedrische Gestaltungen dieser Abtheilung.

a. Tetraedrische Hälften.

b. Pyritoedrische Hälften.

c. (Granatdioedrische Hälften.)

d. (Pyrito-Tetraedrische Hälften.) *)

2) Zwei Richtungen sind gleich, und verschieden von der dritten. Zwei- u. einaxige Abth. Viergliedrige Syst.

Hemiedrische Gestaltungen.

a. Zwei- und viergliedrige Systeme.

b. Ein- und zwei- und viergliedrige Systeme.

c. Tetraedrisch viergliedrige Systeme.

3) Alle drei Richtungen sind verschieden. Ein- und ein- und einaxige Abth. Zwei- u. zweigliedrige Syst.

Hemiedrische Gestaltungen.

a. Zwei- und eingliedrige Systeme.

b. Ein- und eingliedrige Systeme.

II. Die Systeme, die auf dem Verhältniß einer Richtung gegen drei andere, auf der ersten senkrechte und unter sich gleiche Richtungen beruhen.

4) Die drei- und einaxige Abth. Sechsgliedrige Syst.

Hemiedrische Gestaltungen.

a. Die dreigliedrigen Systeme.

---

*) Die beiden letztern Gestaltungen sind bis jetzt bloß erdachte; in der erwähnten Abhandlung hießen die granatdioedrischen Hälften: gedrehte Leuzitoide. Mit dem Namen pyritotetraedrische Hälften bezeichne ich die Gestalten, die entstehen, wenn in den pyritoedrischen Hälften die Verhältnisse des Tetraedrischen hinzutreten, — oder wenn in den tetraedrischen Hälften die Verhältnisse des Pyritoedrischen hinzutreten. Dieselbe Gestalt entsteht auch, wenn das Granatdioeder tetraedrisch oder pyritoedrisch wird.

Diese Zurückführung der Krystallgestalten auf diese einfachsten Richtungen im Raume, umfaßt die ganze Mannigfaltigkeit der krystallinischen Welt, und hat der Krystallonomie einen wahrhaft physikalischen Standpunkt gewonnen, und schon gewähren die neuesten Entdeckungen der Physik ihr die überraschendsten Belege. Ein grosses Feld der Untersuchung, was die Krystallonomie auf das Klarste erkannt hatte, hat in unserer Zeit den Physikern sich eröffnet, die Erforschung der Seiten (latera) thätiger Richtungen.

Alle Unterabtheilungen nämlich der vier Hauptabth., beruhen in den Verhältnissen der Seiten *) der krystallinischen Grundrichtungen, so wie die Hauptabtheilungen in dem Verhältniß der Richtungen selbst beruhen. Es gestattet der Raum einer Einleitung nicht, diese Verhältnisse in den Seiten der Richtungen in den verschiedenen Unterabth. auseinander zu setzen, nur, wie durch diese Analyse der Gestaltungen jenes Räthsel der zwei- und eingliedrigen Systeme, das die Erforschung der Zonenabhängigkeit nicht heben konnte, gelöst ist, und wie die, in der Erscheinung noch dunkleren und räthselhafteren Gestalten der ein- und eingliedrigen Systeme ihr klares Verständniß erhalten haben, sei uns erlaubt, möglichst kurz hier zu bemerken, da das in der erwähnten Abhandlung Gesagte wohl möchte mißverstanden sein.

In jeder der Richtungen in den zwei- und zweigliedrigen Systemen sind durch ihre Beziehung zu den zwei andern ungleichen Richtungen, immer zwei gegenüberstehende Seiten gleich, und verschieden von den zwei andern sich gegenüberstehenden Seiten. Tritt nun eine Verschiedenheit ein zwischen zwei sich gegenüberstehenden gleichen Seiten, so daß dieselbe Verschiedenheit auch in den zwei Enden derselben Seiten statt findet, (wodurch die Gleichheit der zwei Enden der Richtung nicht aufgehoben wird), so wird zugleich dasselbe Verhalten in den Seiten der andern

*) Diese Verhältnisse in den Seiten sind besonders auseinander gesetzt in der Abhandlung über die Bezeichnung der Flächen eines Krystallsystems, in Jahrg. 1816 u. 1817 der Schriften d. Berl. Acad.

Richtung, die jenen Seiten zugekehrt sind, gefordert *), und der räumliche Ausdruck dieses Verhaltens in den Seiten der zwei- u. zweigliedrigen Richtungen sind die zwei- u. eingliedrigen Systeme. Stellen wir die Ebene, in der die Seiten dieser Richtungen liegen, vertikal, und tritt unter den Seiten der Richtungen, die in einer horizontalen Ebene liegen, dieselbe Differenz noch hinzu, so sind der räumliche Ausdruck die ein- und eingliedrigen Systeme.

Die zwei- und eingliedrigen Systeme entstehen also nicht, indem die Hälften gleichartiger Flächen zwei- und zweigliedriger Systeme wegfallen, und die ein- und eingliedrigen Systeme sind nicht als entstanden zu denken dadurch, daß von jenen wiederum die Hälfte gleichartiger Flächen fortfiel, dem widerspricht die Natur auf das Bestimmteste, sondern sie sind der Ausdruck der angegebenen Differenzen, die sich in den Seiten der zwei- und zweigliedrigen Richtungen eingesetzt haben. Diese Differenz, Verschiedenheit fordert in den verschiedenen Systemen einen verschiedenen Ausdruck, sie steht nicht überall auf derselben Stufe; bei ihrem ersten Auftreten gleichsam, wo sie dem Verhalten der Richtungen der zwei- und zweigliedrigen Systeme noch nahe liegt, erscheint ihr Ausdruck auch noch im nächsten Zusammenhang mit den zwei- und zweigliedrigen Systemen, je weiter aber die Differenz in den Seiten sich gesteigert hat, je schärfer getrennt steht das System auch von diesen. Daher die Doppelsinnigkeit dieser Systeme, auf die der Prof. Weiß bei seinen frühern Untersuchungen geführt wurde, daß er einige Systeme dieser Abtheilung zu den zwei- und zweigliedrigen stellte, während er die andern, davon trennend, als eigenthümliche charakterisirte.

Nachdem so die Natur der verschiedenen Systeme in ihren Beziehungen zu den ihnen zu Grunde liegenden Richtungen bestimmt war, konnten auch die im Gange der Entwickelung sich

*) In wiefern in den Seiten der dritten Richtung gleichfalls eine Differenz gefordert wird, soll an einem andern Orte nachgewiesen werden.

einsetzenden Glieder nur in Bezug auf diese Richtungen gedacht werden; es entstand der Ausdruck, die Bezeichnung der verschiedenen Glieder, indem das Verhältniß in den Grundrichtungen angegeben wird, das durch die Punkte bestimmt wird, durch welche die Fläche gelegt, ihre Lage bestimmt ist. (S. Schriften d. Königl. Akad. zu Berlin 1816—1817.) Die Stellen in jedem System, die seinen Grundrichtungen entsprechen, werden durch keine seiner Gestaltungen zurückgedrängt, treten constant als sich besonders auszeichnend im ganzen Gange der Entwickelung hervor, z. B. die Stellen der Ecken eines zwei- und zweikantigen Octaeders werden der Anschauung durch keine Gestaltung eines zwei- und zweigliedrigen Systems entrückt, und dasselbe gilt von den Stellen der Ecken eines Rhomboeders und Dihexaeders. Daher ist die Bezeichnung der Glieder durch ihre Beziehung zu den Richtungen, die diesen Stellen entsprechen, zu den Grundrichtungen, eben so sehr ein treues Abbild der äußern Gestalt, als sie in der Gestaltung gegründet ist. — In der ein- und ein- und einaxigen Abtheilung wird die in der Erscheinung vorherrschende Richtung c, und von den zwei andern Richtungen wird die kürzere a, die längere b genannt; in der zwei- und einaxigen Abtheilung ist $a = b$, und in der gleichaxigen ist $a = b = c$. Das Zeichen $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ sagt, daß die Fläche gelegt werden muß durch $\frac{1}{m}a$, und durch $\frac{1}{n}b$ und durch $\frac{1}{p}c$. In den sechsgliedrigen Systemen wird die Axe durch c, und die drei andern auf ihr senkrecht stehenden Richtungen werden durch a bezeichnet, und die drei mittlern, zwischen ihnen liegenden Richtungen, durch s.

Me-

Methode, den Zusammenhang der Glieder eines Krystallisationssystems und ihre gegenseitigen Verhältnisse graphisch darzustellen.

Erster Abschnitt.

Die graphische Darstellung.

§. 1.

Der Zusammenhang der verschiedenen Glieder eines Krystallisationssystems, der als das Bestimmende für alle übrigen gegenseitigen Verhältnisse angesehen werden muß, bleibt bei jeder Krystallbetrachtung das erste und hauptsächlichste Ziel des Erkennens. Ueber diesen Zusammenhang, seinem Wesen nach, bestehend in dem lebendigen Wechselverhältniß der Glieder, sind uns bis jetzt nur leise Ahndungen erlaubt; er umfaßt die ganze tiefe Natur der Cohäsion — zu vergleichen der Weise, wie sie in der Musik dem Ohre ihre Geheimnisse enthüllt.

§. 2.

Wie aber dieser Zusammenhang seiner Erscheinung nach sich offenbart, ist zuerst in seiner Allgemeinheit und Bestimmtheit vom Herrn Professor Weiß ausgesprochen und nachgewiesen. Dieser Zusammenhang ist ausgesprochen im Gesetz der Zonenbestimmung.

Eine Zone nennt Hr. Prof. Weiß den Inbegriff von Flächen, die alle eine Richtung gemeinschaftlich haben, die alle derselben Linie parallel sind. Solche Flächen schneiden sich in parallelen Kanten, z. B. im sphäroedrischen System kennen wir eine Mehrheit von Flächen, die alle die Richtung der Octaeder-Kante gemein haben: die Granatoederfläche, einige Pyramiden-Octaederflächen, die Leuzitfläche und einige Leuzitoidflächen und die Würfelfläche haben alle die genannte Richtung gemeinschaftlich.

Das Gesetz der Zonen besteht nun darin: daß in der Entwickelung der verschiedenen Glieder, jedes spätere Glied bestimmt wird durch Zonen der frühern Glieder. Eine Fläche ist bestimmt durch zwei Zonen, in die sie gehört, weil zwei Richtungen nur einer Ebene angehören können.

§. 3.

Die Bezeichnung der Flächen enthält die Elemente, deren einfachste Combination uns erkennen läßt, sowohl, ob eine Fläche in einer gekannten Zone liege, als auch, welches die Fläche sei, die durch zwei bekannte Zonen bestimmt wird. — Eine Zone ist gekannt, wenn wir zwei Flächen, ihr angehörig, kennen. Soll der Ausdruck für eine Fläche, durch zwei bekannte Zonen bestimmt, gefunden werden, so setzen wir im Allgemeinen vier Flächen voraus, die diese zwei Zonen bestimmen:

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\frac{1}{m'}a : \frac{1}{n'}b : \frac{1}{p'}c} \\ \boxed{\frac{1}{m''}a : \frac{1}{n''}b : \frac{1}{p''}c}\end{array}\right. \quad \text{und} \quad \left.\begin{array}{l}\boxed{\frac{1}{m_{\prime}}a : \frac{1}{n_{\prime}}b : \frac{1}{p_{\prime}}c} \\ \boxed{\frac{1}{m_{\prime\prime}}a : \frac{1}{n_{\prime\prime}}b : \frac{1}{p_{\prime\prime}}c}\end{array}\right.$$

Aus ihnen entwickeln sich, nach einem leicht übersehbaren Gesetz, die Hülfswerthe:

$$M = p'n'' - p''n' \qquad M' = p_{,}n_{,,} - p_{,,}n_{,}$$
$$N = m'p'' - m''p' \qquad N' = m_{,}p_{,,} - m_{,,}p_{,}$$
$$P = m'n'' - m''n' \qquad P' = m_{,}n_{,,} - m_{,,}n_{,}$$

und aus diesen bestimmen sich nach demselben Gesetz die Werthe m, n, p für die Fläche $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$, die durch die zwei Zonen bestimmt ist:

$$m = PN' - P'N$$
$$n = MP' - M'P$$
$$p = MN' - M'N.$$

Diese Werthbestimmungen zu entwickeln, ist ein einfaches Problem der analytischen Geometrie, nämlich einmal den Durchschnitt zweier Ebenen zu finden, und dann durch zwei solcher Durchschnitte von zwei Paaren von Ebenen, eine neue Ebene zu legen. Die hier gebrauchten Hülfsgrößen, M N P und M' N' P' beziehen sich auf die Durchschnittslinie von jedem Paare der Ebenen, sind die Coordinaten derselben in den, den Buchstaben M, N u. s. w. entsprechenden Richtungen, wenn die Durchschnittslinie durch den Mittelpunkt des Systems der drei rechtwinkligen Dimensionen gelegt gedacht wird.

Ein Beispiel mag die Anwendung dieser Methode noch erläutern. Es ist der Ausdruck für die Fläche zu finden, die aus der Kantenzone des Granatoeders zugleich in einer Diagonalzone des Octaeders liegt, die eine Richtung mit $|a : c \infty b|$ und $|b : c \infty a|$ gemein hat, und zugleich mit $|a : b : c|$ und $|-b : c \infty a|$.

$$M = 1 \qquad M' = -2$$
$$N = 1 \qquad N' = 1$$
$$P = 1 \qquad P' = -1$$

$$m = 2$$
$$n = 1$$
$$p = 3.$$

Also ist der gesuchte Ausdruck

$$\boxed{\tfrac{1}{2}a : b : \tfrac{1}{3}c}$$

für die Fläche, die die Eigenschaft hat, daß sie in die Kantenzone des Granatoeders und die Diagonalzone des Octaeders fällt.

§. 4.

Ob die Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ in die Zone der Flächen $\boxed{\frac{1}{m'}a : \frac{1}{n'}b : \frac{1}{p'}c}$, $\boxed{\frac{1}{m''}a : \frac{1}{n''}b : \frac{1}{p''}c}$ gehört, ist aus der höchst einfachen Bedingungsgleichung zu ersehen:

$$Mm + Nn = Pp.$$

Für die so eben in Betracht gezogene Diagonalzone des Octaeders z. B. hatten wir $M = -2$, $N = 1$, $P = -1$, und diese Werthe geben als Bedingungsgleichung:

$$2m - n = p.$$

Alle Flächen, deren Dimensionswerthe m, n, p dieser Gleichung entsprechen, liegen in der Diagonalzone des Octaeders, haben mit der Octaederfläche die Richtung ihrer Diagonale gemein. Von den beobachteten Flächen des sphäroedrischen Systems leisten dieser Gleichung Genüge:

$\boxed{1 : 1 : 1}$ $\boxed{\tfrac{1}{2} : 1 : \tfrac{1}{3}}$ $\boxed{\tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3} : 1}$ $\boxed{\tfrac{1}{3} : 1 : \tfrac{1}{5}}$ $\boxed{1 : \tfrac{1}{2} : \infty}$

$\boxed{1 : -1 : \tfrac{1}{3}}$ $\boxed{1 : -\tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4}}$ $\boxed{1 : -\tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{5}}$ $\boxed{\infty - 1 : 1}$

$\boxed{-1 - \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3}}$ $\boxed{-1 : -\tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{2}}$ $\boxed{-1 : -\tfrac{1}{3} : 1}$.

Aus zwei solchen Bedingungsgleichungen:

$$Mm + Nn = Pp \quad \text{und}$$
$$M'm + N'n = P'p$$

lassen sich wiederum die Werthe m, n, p entwickeln, da es nur auf ihr gegenseitiges Verhältniß ankömmt.

§. 5.

So einfach die Rechnung nun auch ist, so wird sie doch sehr lang und ermüdend, wenn es gilt, sowohl die Zonen alle zu kennen, die bis auf einen gewissen Punkt der Beobachtung sich entwickelt haben, als auch von jeder einzelnen Zone die Gesammtheit der Flächen, die sich in ihr ausgebildet haben, zu erfahren, und von jeder Fläche die Gesammtheit der Zonen, denen sie angehört, zu kennen. Es wäre eine sehr mühsame und lange Arbeit, den gedachten Forderungen im sphäroedrischen Systeme mit den doch nur wenigen beobachteten Flächen zu genügen. — Was aber die Hauptsache ist, so haben wir, wie alles nur einzeln und stückweise gewonnen ist, durchaus kein Bild dadurch von dem ganzen Zusammenhange und dessen Verkettungen und Verzweigungen erhalten, sondern müssen das Ganze des Resultats mehr dem Gedächtniß als der geometrischen Anschauung anvertrauen.

Die ganze Betrachtungsweise und die Methode der mathematischen Behandlung vorliegenden Gegenstandes erleidet eine ungemeine Vereinfachung, wenn man statt auf die Flächen des Systems, mehr auf ihre *Normalen*, d. h. auf die *Linien, die aus dem Mittelpunkte des Systems senkrecht auf die Flächen gezogen gedacht werden*, die Aufmerksamkeit richtet.

Von der rein mathematischen Seite ist diese Weise der Behandlung, daß für die Flächen ihre Normalen betrachtet werden, daß das Eine in die Stelle des Andern gesetzt wird, gänzlich gerechtfertigt, und von der Seite der physikalischen Betrachtung scheint, nach unserm jetzigen Standpunkte, Alles dafür zu sprechen, alle Verhältnisse, wie sie mit der Fläche auftreten, aufzulösen in Verhältnisse ihrer Normalen, alle Eigenthümlichkeiten des Krystalls in den verschiedenen Richtungen als lineare Thätigkeiten derselben anzusehn. Denken wir z. B. an die Erscheinungen des Blätterdurchganges, der jeder Krystallfläche mehr

oder weniger hervortretend, entspricht, an die Lichtreflexion dieser Blätterdurchgänge u. a. m., so deutet dieses Alles auf eine Thätigkeit, die senkrecht auf die Krystallfläche wirkt, d. h. in der Richtung ihrer Normale.

§. 6.

Hiernach spricht der Begriff der Zone sich aus, als der **Inbegriff von möglichen Flächen, deren Normalen in Einer Ebene liegen.**

Diese Ansicht der Zonen giebt uns ein Mittel, die Gesammtheit der Zonen und ihren Zusammenhang untereinander in einem geometrischen Bilde darzustellen. Verlängern wir nämlich alle Normalen, bis sie eine und dieselbe Ebene durchschneiden, so müssen alle die Durchschnittspunkte in einer geraden Linie liegen, die von solchen Normalen herrühren, die in einer Ebene liegen, und umgekehrt gehören alle Durchschnittspunkte, die in einer geraden Linie liegen, solchen Normalen zu, die in einer Ebene liegen, und deren Flächen also in eine und dieselbe Zone gehören. Es bedarf also zur Erforschung aller existirenden Zonen nur der Aufzeichnung der Durchschnittspunkte der Normalen mit einer Ebene auf diese, und wir werden uns bald überzeugen, daß dieses sowohl eine sehr einfache Operation ist, als daß es auch bei der Aufzeichnung keiner geometrischen Genauigkeit bedarf, um mit bloßen Augen oder mit Hülfe eines Lineals alle existirende gerade Linien herauszufinden.

§. 7.

Zuerst soll auseinander gesetzt werden, wie diese Durchschnittspunkte auf der geraden Endfläche des Systems zu entwerfen sind, die man zu dieser Aufzeichnung, wegen der größern Einfachheit des Verfahrens, auch immer beibehalten wird, wenn nicht besondere Rücksichten, wie wir solche später kennen lernen werden, andere Krystallflächen dazu bestimmen.

Auf dieser geraden Endfläche müssen zuerst zwei sich recht-

winklig durchschneidende gerade Linien gezogen werden, parallel den Dimensionen a und b des Krystallsystems, oder drei unter 60° sich schneidende, parallel den drei Dimensionen des sechs- oder drei-gliedrigen Systems, je nachdem das vorliegende System zu dieser Abtheilung gehört, oder zu denen, deren Natur in den drei rechtwinkligen Dimensionen eingeschlossen ist. — Der Durchschnittspunkt der gezogenen Linien gehört der Normale der geraden Endfläche; sie steht senkrecht auf der Dimension c.

Die Normalen der Seitenflächen $\boxed{a \; \infty b \; \infty c}$ und $\boxed{b \; \infty a \; \infty c}$ sind parallel mit den gezogenen Linien (die wir correspondirend α und β nennen wollen), — treffen diese im Unendlichen. Von allen Flächen, die zwischen $\boxed{a \; \infty b \; \infty c}$ und der geraden Endfläche $\boxed{c \; \infty a \; \infty b}$ liegen, durchschneiden die Normalen die gerade Endfläche in der Linie α, und dasselbe gilt von den Flächen zwischen $\boxed{b \; \infty a \; \infty c}$ und $\boxed{c \; \infty a \; \infty b}$, in Beziehung auf die Linie β. Um nachzuweisen, wie die Linie α von den Normalen der Flächen $\boxed{\frac{1}{m} a : c \; \infty b}$ geschnitten wird, bedienen wir uns des Durchschnitts (a, c) des Krystalls Fig. 1. AB ist die Richtung c, CB die Richtung a, und AC die Diagonale der Fläche $\boxed{\frac{1}{m} a : c \; \infty b}$. Die Normale dieser Fläche steht senkrecht auf ihrer Diagonale, ist dargestellt durch BD. AE ist $\parallel$ mit der Richtung a, ist unsere Richtung α. Es wird gefragt nach der von der Normale BD auf α abgeschnittenen Größe AE. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und ABE ergiebt sich

$$CB : AB = AB : AE \text{ d. i.}$$

$$\frac{1}{m} a : c = c : AE$$

$$AE = \frac{mc^2}{a}.$$

Würde nach den abgeschnittenen Größen auf α für die Flächen $\boxed{\frac{1}{m}a : c \quad \infty b}$, $\boxed{\frac{1}{p}a : c \quad \infty b}$ u. s. w. gefragt, so werden diese $\frac{nc^2}{a}$, $\frac{pc^2}{a}$ u. s. w. sein. S. Fig. 2. Wenn für die Neigungen der Flächen gegen die Axe die Sinusse, bei konstanten Cosinussen, fortschreiten, wie $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ u. s. w., so schreiten die Sinusse für die Neigungen der Normalen gegen die Axe fort, wie m, n, p u. s. w. Diese beiderlei Neigungen stehen in dem Verhältniß des gegenseitigen Ergänzens zu einem rechten Winkel.

In Beziehung auf die Flächen $\boxed{\frac{1}{m}b : c \infty a}$ $\boxed{\frac{1}{n}b : c \infty c}$ $\boxed{\frac{1}{p}b : c \quad \infty a}$ u. s. w. gilt ganz dasselbe für die Linie β, auch von dieser werden von den Normalen dieser Flächen Stücke abgeschnitten, die sich verhalten wie m, n, p u. s. w. Hier ist aber die Einheit, die diese Vervielfachungen erleidet, $\frac{c^2}{b}$, wie sie in Bezug auf α war $\frac{c^2}{a}$. Nachdem diese Einheiten auf den Linien α und β aufgezeichnet sind, bedarf es, zur Bestimmung des Durchschnitts der Normale irgend einer Fläche dieser Zonen, nur einer Vervielfachung vom Mittelpunkt der sich schneidenden Linien von α und β aus. Da es aber nur auf das Verhältniß der Größen $\frac{c^2}{a}$ und $\frac{c^2}{b}$ zur Höhe des Krystalls c ankömmt, so setzen wir diese Höhe = 1, und dann sind uns die Einheiten auf α und β: $\frac{c}{a}$ und $\frac{c}{b}$.

Wir haben hier bloß auf die Systeme der drei rechtwink-

ligen Dimensionen Rücksicht genommen; es ergiebt sich aber von selbst, daß in den sechsgliedrigen und dreigliedrigen Systemen dasselbe gilt für die Flächen, deren Normalen in einem der drei Hauptschnitte liegen, was hier gesagt ist für Flächen, deren Normalen in einem der zwei Hauptschnitte liegen — und es bleibt uns überhaupt nur noch die Bestimmung für solche Flächen, deren Normalen nicht in die Hauptschnitte fallen.

§. 8.

Die Durchschnittspunkte der Normalen nennen wir die Flächenorte. Im vorigen Paragraph bestimmten wir die Flächenorte für $\left|\frac{1}{m}a : c \infty b\right|$ u. s. w., $\left|\frac{1}{m}b : c \infty a\right|$ u. s. w., wir fragen jetzt nach dem Flächenorte von $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c\right|$. Diese Fläche liegt in der Diagonalzone von $\left|\frac{1}{m}a : c \infty b\right|$ und $\left|\frac{1}{n}b : c \infty a\right|$. Die Diagonalzone von $\left|\frac{1}{m}a : c \infty b\right|$ ist bestimmt durch die Fläche $|b : \infty c \infty a|$, die Ebene der Diagonalzone geht durch den Mittelpunkt des Krystalls und durch eine Linie, die von der Normale der Fläche $\left|\frac{1}{m}a : c \infty b\right|$ nach der Normale der Fläche $|b \infty c \infty a|$ gezogen ist, die also den Flächenort von $\left|\frac{1}{m}a : c \infty b\right|$ mit dem Flächenort $|b \infty c \infty a|$ verbindet. S. Fig. 3, wo $m\frac{c}{a}$ der Flächenort von $\left|\frac{1}{m}a : c \infty b\right|$ ist, und die aus diesem Punkte mit β

Eine Zone nennt Hr. Prof. Weiß den Inbegriff von Flächen, die alle eine Richtung gemeinschaftlich haben, die alle derselben Linie parallel sind. Solche Flächen schneiden sich in parallelen Kanten, z. B. im sphäroedrischen System kennen wir eine Mehrheit von Flächen, die alle die Richtung der Octaeder-Kante gemein haben: die Granatoederfläche, einige Pyramiden-Octaederflächen, die Leuzitfläche und einige Leuzitoidflächen und die Würfelfläche haben alle die genannte Richtung gemeinschaftlich.

Das Gesetz der Zonen besteht nun darin: daß in der Entwickelung der verschiedenen Glieder, jedes spätere Glied bestimmt wird durch Zonen der frühern Glieder. Eine Fläche ist bestimmt durch zwei Zonen, in die sie gehört, weil zwei Richtungen nur einer Ebene angehören können.

§. 3.

Die Bezeichnung der Flächen enthält die Elemente, deren einfachste Combination uns erkennen läßt, sowohl, ob eine Fläche in einer gekannten Zone liege, als auch, welches die Fläche sei, die durch zwei bekannte Zonen bestimmt wird. — Eine Zone ist gekannt, wenn wir zwei Flächen, ihr angehörig, kennen. Soll der Ausdruck für eine Fläche, durch zwei bekannte Zonen bestimmt, gefunden werden, so setzen wir im Allgemeinen vier Flächen voraus, die diese zwei Zonen bestimmen:

$$\boxed{\frac{1}{m'}a : \frac{1}{n'}b : \frac{1}{p'}c} \qquad \boxed{\frac{1}{m_{\prime}}a : \frac{1}{n_{\prime}}b : \frac{1}{p_{\prime}}c}$$

und

$$\boxed{\frac{1}{m''}a : \frac{1}{n''}b : \frac{1}{p''}c} \qquad \boxed{\frac{1}{m_{\prime\prime}}a : \frac{1}{n_{\prime\prime}}b : \frac{1}{p_{\prime\prime}}c}$$

Aus ihnen entwickeln sich, nach einem leicht übersehbaren Gesetz, die Hülfswerthe:

$|a : \frac{1}{2}c \; \infty b|$ $|a : \frac{1}{4}c \; \infty b|$ $|a : -b \; \infty c|$

$|\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b \; \infty c|$ $|c \; \infty a \; \infty b|$.

Der Ort 1 (1) gehört der Fläche $|a : b : c|$, und ist bestimmt worden durch den Durchschnitt zweier Senkrechten, auf α in (1) und auf β in 1. Beides, (1) und 1 sind Flächenorte für $|a : c \; \infty b|$ und $|b : c \; \infty a|$. Eben so ist der Ort für $|a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c|$ bestimmt durch die Senkrechte auf α und β in ($\frac{1}{2}$) und 1, welches die Flächenorte für $|a : \frac{1}{2}c \; \infty b|$ und $|b : c \; \infty a|$ sind. Der Ort ($\frac{1}{4}$) gehört der Fläche $|a : \frac{1}{4}c \; \infty b|$. Die Linie von 0 nach 1 (1) enthält den Flächenort für $|a : b \; \infty c|$ aber in ihrer unendlichen Entfernung, da sie aus den Diagonalzonen von $|a \; \infty b \; \infty c|$ und $|b \; \infty a \; \infty c|$, deren Orte im Unendlichen von α und β liegen. Der Ort 0 gehört der geraden Endfläche $|c \; \infty a \; \infty b|$.

Der eigentliche Zusammenhang dieser Glieder ist nun mit einem Blick zu übersehen. Der Ort ($\frac{1}{2}$) ist von 1 (1) und dem gegenüberstehenden 1 durch zwei in ($\frac{1}{2}$) sich kreuzende Zonenlinien bestimmt; und auf gleiche Weise ($\frac{1}{4}$) durch zwei in ($\frac{1}{4}$) sich kreuzende Zonenlinien von 1 ($\frac{1}{2}$) nach dem gegenüberstehenden 1. Parallel der Linie von 0 nach 1 (1) können Linien gezogen werden von ($\frac{1}{2}$) nach dem gegenüberstehenden 1 ($\frac{1}{2}$), und von (1) nach 1, ein Zeichen, daß auch diese Zonenlinien den Flächenort von $|a : b \; \infty c|$ enthalten, daß $|a : \frac{1}{2}c \; \infty b|$ $|-a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c|$ und $|a : c \; \infty b|$ $|b : c \; \infty a|$ Zonen bilden, in denen die Säulenfläche $|a : -b \; \infty c|$ liegt. Eben so können von (1) nach dem 1 ($\frac{1}{2}$) der andern Seite und von ($\frac{1}{2}$) nach 1 (1) der andern Seite Linien gezogen werden, parallel mit der Linie, die den Flächenort von $|\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b \; \infty c|$ enthält, (die mit $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{2}$) bezeichnet ist), ein Beweis, daß diese Fläche auch in den von den gezogenen Linien angegebenen Zo-

Also ist der gesuchte Ausdruck

$$\left[\tfrac{1}{2}a : b : \tfrac{1}{3}c\right]$$

für die Fläche, die die Eigenschaft hat, daß sie in die Kantenzone des Granatoeders und die Diagonalzone des Octaeders fällt.

§. 4.

Ob die Fläche $\left[\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right]$ in die Zone der Flächen $\left[\frac{1}{m'}a : \frac{1}{n'}b : \frac{1}{p'}c\right]$, $\left[\frac{1}{m''}a : \frac{1}{n''}b : \frac{1}{p''}c\right]$ gehört, ist aus der höchst einfachen Bedingungsgleichung zu ersehen:

$$Mm + Nn = Pp.$$

Für die so eben in Betracht gezogene Diagonalzone des Octaeders z. B. hatten wir $M = -2$, $N = 1$, $P = -1$, und diese Werthe geben als Bedingungsgleichung:

$$2m - n = p.$$

Alle Flächen, deren Dimensionswerthe m, n, p dieser Gleichung entsprechen, liegen in der Diagonalzone des Octaeders, haben mit der Octaederfläche die Richtung ihrer Diagonale gemein. Von den beobachteten Flächen des sphäroedrischen Systems leisten dieser Gleichung Genüge:

$[1 : 1 : 1]$ $[\tfrac{1}{2} : 1 : \tfrac{1}{3}]$ $[\tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3} : 1]$ $[\tfrac{1}{3} : 1 : \tfrac{1}{5}]$ $[1 : \tfrac{1}{2} : \infty]$

$[1 : -1 : \tfrac{1}{3}]$ $[1 : -\tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4}]$ $[1 : -\tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{5}]$ $[\infty - 1 : 1]$

$[-1 - \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3}]$ $[-1 : -\tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{2}]$ $[-1 : -\tfrac{1}{3} : 1]$.

Aus zwei solchen Bedingungsgleichungen:

$$Mm + Nn = Pp \text{ und}$$
$$M'm + N'n = P'p$$

lassen sich wiederum die Werthe m, n, p entwickeln, da es nur auf ihr gegenseitiges Verhältniß ankömmt.

§. 5.

So einfach diese Rechnung nun auch ist, so wird sie doch sehr lang und ermüdend, wenn es gilt, sowohl die Zonen alle zu kennen, die bis auf einen gewissen Punkt der Beobachtung sich entwickelt haben, als auch von jeder einzelnen Zone die Gesammtheit der Flächen, die sich in ihr ausgebildet haben, zu erfahren, und von jeder Fläche die Gesammtheit der Zonen, denen sie angehört, zu kennen. Es wäre eine sehr mühsame und lange Arbeit, den gedachten Forderungen im sphäroedrischen Systeme mit den doch nur wenigen beobachteten Flächen zu genügen. — Was aber die Hauptsache ist, so haben wir, wie alles nur einzeln und stückweise gewonnen ist, durchaus kein Bild dadurch von dem ganzen Zusammenhange und dessen Verkettungen und Verzweigungen erhalten, sondern müssen das Ganze des Resultats mehr dem Gedächtniß als der geometrischen Anschauung anvertrauen.

Die ganze Betrachtungsweise und die Methode der mathematischen Behandlung vorliegenden Gegenstandes erleidet eine ungemeine Vereinfachung, wenn man statt auf die Flächen des Systems, mehr auf ihre Normalen, d. h. auf die Linien, die aus dem Mittelpunkte des Systems senkrecht auf die Flächen gezogen gedacht werden, die Aufmerksamkeit richtet.

Von der rein mathematischen Seite ist diese Weise der Behandlung, daß für die Flächen ihre Normalen betrachtet werden, daß das Eine in die Stelle des Andern gesetzt wird, gänzlich gerechtfertigt, und von der Seite der physikalischen Betrachtung scheint, nach unserm jetzigen Standpunkte, Alles dafür zu sprechen, alle Verhältnisse, wie sie mit der Fläche auftreten, aufzulösen in Verhältnisse ihrer Normalen, alle Eigenthümlichkeiten des Krystalls in den verschiedenen Richtungen als lineare Thätigkeiten derselben anzusehn. Denken wir z. B. an die Erscheinungen des Blätterdurchganges, der jeder Krystallfläche mehr

oder weniger hervortretend, entspricht, an die Lichtreflexion dieser Blätterdurchgänge u. a. m., so deutet dieses Alles auf eine Thätigkeit, die senkrecht auf die Krystallfläche wirkt, d. h. in der Richtung ihrer Normale.

§. 6.

Hiernach spricht der Begriff der Zone sich aus, als der *Inbegriff von möglichen Flächen, deren Normalen in Einer Ebene liegen.*

Diese Ansicht der Zonen giebt uns ein Mittel, die Gesammtheit der Zonen und ihren Zusammenhang untereinander in einem geometrischen Bilde darzustellen. Verlängern wir nämlich alle Normalen, bis sie eine und dieselbe Ebene durchschneiden, so müssen alle die Durchschnittspunkte in einer geraden Linie liegen, die von solchen Normalen herrühren, die in einer Ebene liegen, und umgekehrt gehören alle Durchschnittspunkte, die in einer geraden Linie liegen, solchen Normalen zu, die in einer Ebene liegen, und deren Flächen also in eine und dieselbe Zone gehören. Es bedarf also zur Erforschung aller existirenden Zonen nur der Aufzeichnung der Durchschnittspunkte der Normalen mit einer Ebene auf diese, und wir werden uns bald überzeugen, daß dieses sowohl eine sehr einfache Operation ist, als daß es auch bei der Aufzeichnung keiner geometrischen Genauigkeit bedarf, um mit bloßen Augen oder mit Hülfe eines Lineals alle existirende gerade Linien herauszufinden.

§. 7.

Zuerst soll auseinander gesetzt werden, wie diese Durchschnittspunkte auf der geraden Endfläche des Systems zu entwerfen sind, die man zu dieser Aufzeichnung, wegen der größern Einfachheit des Verfahrens, auch immer beibehalten wird, wenn nicht besondere Rücksichten, wie wir solche später kennen lernen werden, andere Krystallflächen dazu bestimmen.

Auf dieser geraden Endfläche müssen zuerst zwei sich recht-

winklig durchschneidende gerade Linien gezogen werden, parallel den Dimensionen a und b des Krystallsystems, oder drei unter 60° sich schneidende, parallel den drei Dimensionen des sechs- oder drei-gliedrigen Systems, je nachdem das vorliegende System zu dieser Abtheilung gehört, oder zu denen, deren Natur in den drei rechtwinkligen Dimensionen eingeschlossen ist. — Der Durchschnittspunkt der gezogenen Linien gehört der Normale der geraden Endfläche; sie steht senkrecht auf der Dimension c.

Die Normalen der Seitenflächen $\boxed{a \; \infty b \; \infty c}$ und $\boxed{b \; \infty a \; \infty c}$ sind parallel mit den gezogenen Linien (die wir correspondirend α und β nennen wollen), — treffen diese im Unendlichen. Von allen Flächen, die zwischen $\boxed{a \; \infty b \; \infty c}$ und der geraden Endfläche $\boxed{c \; \infty a \; \infty b}$ liegen, durchschneiden die Normalen die gerade Endfläche in der Linie α, und dasselbe gilt von den Flächen zwischen $\boxed{b \; \infty a \; \infty c}$ und $\boxed{c \; \infty a \; \infty b}$, in Beziehung auf die Linie β. Um nachzuweisen, wie die Linie α von den Normalen der Flächen $\boxed{\frac{1}{m} a : c \; \infty b}$ geschnitten wird, bedienen wir uns des Durchschnitts (a, c) des Krystalls Fig. 1. AB ist die Richtung c, CB die Richtung a, und AC die Diagonale der Fläche $\boxed{\frac{1}{m} a : c \; \infty b}$. Die Normale dieser Fläche steht senkrecht auf ihrer Diagonale, ist dargestellt durch BD. AE ist $\#$ mit der Richtung a, ist unsere Richtung α. Es wird gefragt nach der von der Normale BD auf α abgeschnittenen Größe AE. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und ABE ergiebt sich

$$CB : AB = AB : AE \text{ d. i.}$$

$$\frac{1}{m} a : c = c : AE$$

$$AE = \frac{m c^2}{a}.$$

Würde nach den abgeschnittenen Größen auf α für die Flächen $\boxed{\frac{1}{m}a : c \;\infty\; b}$, $\boxed{\frac{1}{p}a : c \;\infty\; b}$ u. s. w. gefragt, so werden diese $\frac{nc^2}{a}$, $\frac{pc^2}{a}$ u. s. w. sein. S. Fig. 2. Wenn für die Neigungen der Flächen gegen die Axe die Sinusse, bei konstanten Cosinussen, fortschreiten, wie $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ u. s. w., so schreiten die Sinusse für die Neigungen der Normalen gegen die Axe fort, wie m, n, p u. s. w. Diese beiderlei Neigungen stehen in dem Verhältniß des gegenseitigen Ergänzens zu einem rechten Winkel.

In Beziehung auf die Flächen $\boxed{\frac{1}{m}b : c \;\infty\; a}$ $\boxed{\frac{1}{n}b : c \;\infty\; c}$ $\boxed{\frac{1}{p}b : c \;\infty\; a}$ u. s. w. gilt ganz dasselbe für die Linie β, auch von dieser werden von den Normalen dieser Flächen Stücke abgeschnitten, die sich verhalten wie m, n, p u. s. w. Hier ist aber die Einheit, die diese Vervielfachungen erleidet, $\frac{c^2}{b}$, wie sie in Bezug auf α war $\frac{c^2}{a}$. Nachdem diese Einheiten auf den Linien α und β aufgezeichnet sind, bedarf es, zur Bestimmung des Durchschnitts der Normale irgend einer Fläche dieser Zonen, nur einer Vervielfachung vom Mittelpunkt der sich schneidenden Linien von α und β aus. Da es aber nur auf das Verhältniß der Größen $\frac{c^2}{a}$ und $\frac{c^2}{b}$ zur Höhe des Krystalls c ankömmt, so setzen wir diese Höhe = 1, und dann sind uns die Einheiten auf α und β: $\frac{c}{a}$ und $\frac{c}{b}$.

Wir haben hier bloß auf die Systeme der drei rechtwink-

ligen Dimensionen Rücksicht genommen; es ergiebt sich aber von selbst, daß in den sechsgliedrigen und dreigliedrigen Systemen dasselbe gilt für die Flächen, deren Normalen in einem der drei Hauptschnitte liegen, was hier gesagt ist für Flächen, deren Normalen in einem der zwei Hauptschnitte liegen — und es bleibt uns überhaupt nur noch die Bestimmung für solche Flächen, deren Normalen nicht in die Hauptschnitte fallen.

§. 8.

Die Durchschnittspunkte der Normalen nennen wir die Flächenorte. Im vorigen Paragraph bestimmten wir die Flächenorte für $\left[\frac{1}{m}a : c \infty b\right]$ u. s. w. $\left[\frac{1}{m}b : c \infty a\right]$ u. s. w., wir fragen jetzt nach dem Flächenorte von $\left[\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c\right]$. Diese Fläche liegt in der Diagonalzone von $\left[\frac{1}{m}a : c \infty b\right]$ und $\left[\frac{1}{n}b : c \infty a\right]$. Die Diagonalzone von $\left[\frac{1}{m}a : c \infty b\right]$ ist bestimmt durch die Fläche $[b : \infty c \infty a]$, die Ebene der Diagonalzone geht durch den Mittelpunkt des Krystalls und durch eine Linie, die von der Normale der Fläche $\left[\frac{1}{m}a : c \infty b\right]$ nach der Normale der Fläche $[b \infty c \infty a]$ gezogen ist, die also den Flächenort von $\left[\frac{1}{m}a : c \infty b\right]$ mit dem Flächenort $[b \infty c \infty a]$ verbindet. S. Fig. 3, wo $m\frac{c}{a}$ der Flächenort von $\left[\frac{1}{m}a : c \infty b\right]$ ist, und die aus diesem Punkte mit β

parallel gezogene Linie AD die Verbindung beider Flächenorte ist, weil der Flächenort von $\boxed{b \infty c \infty a}$ im Unendlichen der Richtung β liegt. Die Normale von $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c}$ liegt also in der Ebene, die vom Mitelpunkt des Systems durch AD gelegt ist, ihr Flächenort also in der Linie AD. Da diese Fläche auch in der Diagonalzone von $\boxed{\frac{1}{n}b : c \infty a}$ d. h. zwischen $\boxed{\frac{1}{m}b : c \infty a}$ und $\boxed{a \infty b \infty c}$ liegt, so muß ihre Normale auch in einer Ebene liegen, die durch den Mittelpunkt des Systems und durch CD ⧣ α gelegt ist, also ihr Flächenort auch in der Linie CD liegen. Der Durchschnittspunkt der Linien AD und CD ist der gesuchte Flächenort.

Wir haben also zur Bestimmung des Flächenortes von $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c}$ diese höchst einfache Regel: man bestimme die Flächenorte für $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ und $\boxed{\frac{1}{m}b : c \infty a}$ errichte aus beiden Punkten senkrechte Linien, so ist der Durchschnittspunkt derselben der verlangte Flächenort von $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c}$.

Man wird sich auch nach rein mathematischen Principien leicht Rechenschaft von dieser Regel geben können.

Zur Erläuterung des angegebenen Verfahrens dient Fig. 4; sie giebt die Flächenorte für die gewöhnlich am Schwerspath zu beobachtenden Flächen:

$\boxed{a : b : c}$ $\boxed{a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c}$

$\boxed{b : c \infty a}$ $\boxed{a : c \infty b}$

|a : $\frac{1}{2}$c ∞ b| |a : $\frac{1}{4}$c ∞ b| |a : — b ∞ c|
|$\frac{1}{3}$a : $\frac{1}{2}$b ∞ c| |c ∞ a ∞ b|.

Der Ort 1 (1) gehört der Fläche |a : b : c|, und ist bestimmt worden durch den Durchschnitt zweier Senkrechten, auf α in (1) und auf β in 1. Beides, (1) und 1 sind Flächenorte für |a : c ∞ b| und |b : c ∞ a|. Eben so ist der Ort für |a : $\frac{1}{2}$b : $\frac{1}{2}$c| bestimmt durch die Senkrechte auf α und β in ($\frac{1}{2}$) und 1, welches die Flächenorte für |a : $\frac{1}{2}$c ∞ b| und |b : c ∞ a| sind. Der Ort ($\frac{1}{4}$) gehört der Fläche |a : $\frac{1}{4}$c ∞ b|. Die Linie von 0 nach 1 (1) enthält den Flächenort für |a : b ∞ c| aber in ihrer unendlichen Entfernung, da sie aus den Diagonalzonen von |a ∞ b ∞ c| und |b ∞ a ∞ c|, deren Orte im Unendlichen von α und β liegen. Der Ort 0 gehört der geraden Endfläche |c ∞ a ∞ b|.

Der eigentliche Zusammenhang dieser Glieder ist nun mit einem Blick zu übersehen. Der Ort ($\frac{1}{2}$) ist von 1 (1) und dem gegenüberstehenden 1 durch zwei in ($\frac{1}{2}$) sich kreuzende Zonenlinien bestimmt; und auf gleiche Weise ($\frac{1}{4}$) durch zwei in ($\frac{1}{4}$) sich kreuzende Zonenlinien von 1 ($\frac{1}{2}$) nach dem gegenüberstehenden 1. Parallel der Linie von 0 nach 1 (1) können Linien gezogen werden von ($\frac{1}{2}$) nach dem gegenüberstehenden 1 ($\frac{1}{2}$), und von (1) nach 1, ein Zeichen, daß auch diese Zonenlinien den Flächenort von |a : b ∞ c| enthalten, daß |a : $\frac{1}{2}$c ∞ b| |— a : $\frac{1}{2}$b : $\frac{1}{2}$c| und |a : c ∞ b| |b : c ∞ a| Zonen bilden, in denen die Säulenfläche |a : — b ∞ c| liegt. Eben so können von (1) nach dem 1 ($\frac{1}{2}$) der andern Seite und von ($\frac{1}{2}$) nach 1 (1) der andern Seite Linien gezogen werden, parallel mit der Linie, die den Flächenort von |$\frac{1}{3}$a : $\frac{1}{2}$b ∞ c| enthält, (die mit $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{2}$) bezeichnet ist), ein Beweis, daß diese Fläche auch in den von den gezogenen Linien angegebenen Zo-

nen liegt. — Es bedarf weder eines geübten Auges, noch einer großen Genauigkeit bei der Zeichnung, um diese Eigenschaften beim ersten Anblick derselben abzulesen, zumal da der geringste Zweifel durch die angegebenen Zahlenverhältnisse augenblicklich sich berichtigt.

§. 9.

Nicht weniger einfach ist das anzuwendende Verfahren bei den 6- und 3gliedrigen Systemen. Unterscheiden wir drei nebeneinander liegende Dimensionen durch a, a', a'', und ihre entgegengesetzten Enden durch — a, — a', — a'', und eben so s, s', s'' und — s, — s', — s'', so benennen wir correspondirend, S. Fig. 5, durch α, α', α'', und σ, σ', σ'' die Linien, die auf der geraden Endfläche ihnen parallel gezogen gedacht werden. Wir wissen, daß alle Flächenorte von Flächen der Art, wie $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{2}{m}a'}}$, in α liegen, und von solchen, wie $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{n}a' : \frac{2}{n}a''}}$, in α' liegen.

Soll nun der Ort einer Fläche wie $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a'}}$ bestimmt werden, so machen wir wiederum Gebrauch von der Eigenschaft dieser Fläche, daß sie in der Diagonalzone von $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{2}{m}a'}}$ und in der Diagonalzone von $\boxed{\overset{c}{\frac{2}{n}a : \frac{1}{n}a'}}$ liegt. Die Diagonalzone von $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{2}{m}a'}}$ ist aber bestimmt durch den Conflikt dieser Fläche mit der Fläche

$\boxed{\overset{\infty c}{a' : a''}}$, die senkrecht auf s' steht, deren Flächenort also im Unendlichen von σ' liegt. Bestimmen wir also den Flächenort von $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{2}{m}a'}}$, und ziehen mit σ' aus diesem eine parallele Linie, so liegt in dieser der Ort für $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a'}}$. Diese mit σ' parallele Linie steht aber senkrecht auf α, im Flächenort für $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{2}{m}a'}}$.

Dasselbe erleidet Anwendung in Bezug auf α', wo der Ort der Fläche $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{n}a' : \frac{2}{n}a''}}$ liegt, in deren Diagonalzone unsere vorliegende Fläche $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a'}}$ gleichfalls liegt. Dieser Flächenort ist auch auf der Fig. 5. $\frac{nc}{a'}$, und um die Diagonalzone zu bestimmen, müssen wir wiederum diesen Ort mit dem Flächenort von $\boxed{\overset{\infty c}{a'' : a}}$ durch eine Linie verbinden; da die Fläche $\boxed{\overset{\infty c}{a'' : -a}}$ aber senkrecht auf s'' steht, ihr Ort also im Unendlichen von σ'' liegt, so ist diese Verbindung eine parallele Linie mit σ'' aus $\frac{nc}{a'}$, eine in $\frac{nc}{a'}$ auf α' errichtete senkrechte Linie; — in ihr liegt der Flächenort von $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a'}}$, —

er lag aber auch in der aus $\frac{mc}{a}$ auf α errichteten senkrechten Linie, er ist also durch den Durchschnittspunkt beider Senkrechten bestimmt. So ergiebt sich also dieselbe einfache Regel zur Bestimmmung des Flächenortes von $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a}}$: — man schneide $\frac{mc}{a}$ auf α und $\frac{nc'}{a'}$ auf α' ab, errichte aus den Punkten $\frac{mc}{a}$ und $\frac{nc'}{a'}$ auf α und α' senkrechte Linien, so ist deren Durchschnittspunkt der verlangte Flächenort.

§. 10.

Um auch hier die Anwendung dieser Regel zu erläutern, wählen wir als Beispiel das Quarzsystem. S. Fig. 6. Die hier beobachteten Flächen sind:

$\boxed{\overset{c}{a : a}}$ $\boxed{\overset{2c}{a : a}}$ $\boxed{\overset{3c}{a : a}}$

$\boxed{\overset{4c}{a : a}}$ $\boxed{\overset{c}{a : \frac{1}{2}a}}$ $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a}}$

$\boxed{\overset{c}{\frac{1}{4}a : \frac{1}{3}a}}$ $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{5}a : \frac{1}{6}a}}$ $\boxed{\overset{\infty c}{a : a}}$

Die in der Figur punktirten Linien müssen parallel gedacht werden mit den Dimensionen a, a', a'', sind unsre α, α', α''; auf ihnen ist 0m, 0m' als Einheit $= \frac{c}{a} = \alpha$ genommen. Aus m und m' oder, wie wir uns allgemein ausdrücken, aus 1α und $1\alpha'$ Senkrechte gezogen, so ist deren Durchschnittspunkt 1(1) der Flächenort für $\boxed{\overset{c}{a : a}}$. Aus 2α und $2\alpha'$ errichtete Senkrechte schneiden sich in 2(2), im Flächenort von

$\boxed{\overset{2c}{a : a}}$ u. s w. Aus 3α und 4α errichtete Senkrechte schneiden sich in 3(4), im Flächenort von $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a}}$ u. s. w. Der Flächenort von $\boxed{\overset{\infty c}{a : a}}$ liegt im Unendlichen der Linie durch 1(1) und 0.

Von den Sechs- und Sechskantner-Flächen sind auf dem Schema nur von den Hälften dieser Flächen die Orte aufgezeichnet, wie die Beobachtung ihr Vorkommen gelehrt hat, und zwar die linken Hälften; von der Lage der rechten Hälften wird man auf der Figur sich leicht Rechenschaft geben können, da sie auch diese Eigenthümlichkeit des Quarzsystems treu wiedergiebt, sie selbst in eine rechte und in eine linke Hälfte zerfällt.

Der enge Zusammenhang der verschiedenen Glieder und dessen vielfache Verzweigungen sind in der Figur leicht und klar zu übersehen. Um nur Einiges hiervon hervorzuheben, so bemerken wir, wie die Fläche $\boxed{\overset{c}{a : \frac{1}{2}a}}$ in zwei abwechselnden Kantenzonen des Dihexaeder $\boxed{\overset{c}{a : a}}$ liegt, in welchen zwei abwechselnden Kantenzonen auch zwei an einander liegende Flächen der ersten sechsseitigen Säule liegen; die Verbindungslinie zweier aneinander liegenden Flächenorte 1(1) und 1(1) ist eine Kantenzonenlinie des Dihexaeder $\boxed{\overset{c}{a : a}}$; zwei solcher abwechselnden Kantenzonenlinien schneiden sich in 1(2). — Linien in 1(1) senkrecht auf α sind Diagonalzonenlinien des Dihexaeder $\boxed{\overset{c}{a : a}}$; zwei solcher abwechselnden Diagonalzonenlinien schneiden sich in 2(2); also liegt $\boxed{\overset{2c}{a : a}}$ in zwei abwechselnden Diagonalzonen des Grund-Dihexaeder. — Zwei abwechselnde

Kantenzonen des Dihexaeder $\boxed{\overset{c}{a : \tfrac{1}{2}a}}$ bestimmen wiederum $\boxed{\overset{3c}{a : a}}$; und zwei abwechselnde Diagonalzonen von $\boxed{\overset{2c}{a : a}}$ bestimmen $\boxed{\overset{4c}{a : a}}$. So bestimmt das Grund-Dihexaeder zwei andere Dihexaeder; das eine durch seine abwechselnden Kantenzonen, das andere durch seine abwechselnden Diagonalzonen, jenes bestimmt wieder ein Dihex. durch seine abwechselnden Kantenzonen, und dieses eins durch seine abwechselnden Diagonalzonen, — ein eben so einfacher als enger Zusammenhang, der auf das Klarste in dem Schema dargelegt ist. — Die Flächen der Sechs- und Sechskantner betreffend, so sehen wir, daß sie alle in die Kantenzone des Grund-Dihexaeders gehören, und daß ihre Orte auf der Kantenzonenlinie nach sehr gleichmäßig abgemessenen Intervallen bestimmt sind, nur daß wir eine Lücke bemerken zwischen 1(2) und 3(4), und diese Lücke würde ausgefüllt sein durch den Ort der Fläche $\boxed{\overset{c}{\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a}}$, eine bei andern Systemen beobachtete Fläche; sie würde in der Kantenzone des Grund-Dihexaeders bestimmt durch die Kantenzone von $\boxed{\overset{2c}{a : a}}$, so wie $\boxed{\overset{c}{\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{4}a}}$ durch die Kantenzone von $\boxed{\overset{3c}{a : a}}$ und $\boxed{\overset{c}{\tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{5}a}}$ durch die Kantenzone von $\boxed{\overset{4c}{a : a}}$ bestimmt wird u. s. w.

Ich übergehe, den weitern Zusammenhang dem Leser aufzuzählen; ohne Mühe wird er ihn nun selbst verfolgen können.

Es muß überhaupt nun hinlänglich deutlich sein, wie einfach, leicht und geschwinde die Entwerfung eines solchen Schema's ist, und wie denn mit einem Schlage in diesem geometrischen Bilde Alles zugleich gegeben ist, was die oben angegebene analytische Methode nur mühsam, einzeln und stückweis ge-

geben konnte, und die bei reichlich ausgebildeten Systemen doch am Ende bei großer Anstrengung des Anschauungsvermögens demselben doch nicht alle Verzweigungen der Glieder, in Rücksicht ihres gegenseitigen Zusammenhanges, erkennen läßt.

§. 11.

Zum Schluß dieses Abschnittes gebe ich das Schema des regulären Systems mit seinen gewöhnlichern Gliedern, es dem Leser zu vielfacher und ausgebreiteter Anwendung überlassend. Die Flächenorte sind auf der Würfelfläche dargestellt. Fig. 7. stellt nur die Flächen dar, deren Normalen die Würfelfläche selbst schneiden, nicht die, von denen sie erst in ihrer weitern Ausdehnung über sich hinaus geschnitten wird, wie solche Fig. 8 auch darstellt, wo die Orte aller Flächen (nur der parallelen nicht), wo also für einen 48 Flächner die Orte seiner 24 Flächen angegeben sind, wogegen in Fig. 7. nur die Orte der 8 Flächen dargestellt sind, die sich über der Würfelfläche erheben, die eine vier und vierkantige Ecke des 48 Flächner bilden. Die dargestellten Flächen sind:

$[a \infty a \infty a]$ $[a : a \infty a]$ $[a : a : a]$

$[a : \frac{1}{2}a \infty a]$, $[a : \frac{1}{3}a \infty a]$ } Pyramid. Würfel.

$[a : a : \frac{1}{2}a]$, $[a : a : \frac{1}{3}a]$ } Leuzitoide.

$[\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : a]$, $[\frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a]$ } Pyr. Octaeder.

$[a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a]$, $[a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a]$, $[a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a]$ } 48 Flächner.

Die diesen Flächen entsprechenden Flächenorte wird man leicht aus der gewählten Bezeichnung derselben ersehen können;

Würde nach den abgeschnittenen Grössen auf α für die Flächen $\boxed{\frac{1}{m}a : c \;\infty b}$, $\boxed{\frac{1}{p}a : c \;\infty b}$ u. s. w. gefragt, so werden diese $\frac{nc^2}{a}$, $\frac{pc^2}{a}$ u. s. w. sein. S. Fig. 2. Wenn für die Neigungen der Flächen gegen die Axe die Sinusse, bei konstanten Cosinussen, fortschreiten, wie $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ u. s. w., so schreiten die Sinusse für die Neigungen der Normalen gegen die Axe fort, wie m, n, p u. s. w. Diese beiderlei Neigungen stehen in dem Verhältniß des gegenseitigen Ergänzens zu einem rechten Winkel.

In Beziehung auf die Flächen $\boxed{\frac{1}{m}b : c \;\infty a}$ $\boxed{\frac{1}{n}b : c \;\infty c}$ $\boxed{\frac{1}{p}b : c \;\infty a}$ u. s. w. gilt ganz dasselbe für die Linie β, auch von dieser werden von den Normalen dieser Flächen Stücke abgeschnitten, die sich verhalten wie m, n, p u. s. w. Hier ist aber die Einheit, die diese Vervielfachungen erleidet, $\frac{c^2}{b}$, wie sie in Bezug auf α war $\frac{c^2}{a}$. Nachdem diese Einheiten auf den Linien α und β aufgezeichnet sind, bedarf es, zur Bestimmung des Durchschnitts der Normale irgend einer Fläche dieser Zonen, nur einer Vervielfachung vom Mittelpunkt der sich schneidenden Linien von α und β aus. Da es aber nur auf das Verhältniß der Grössen $\frac{c^2}{a}$ und $\frac{c^2}{b}$ zur Höhe des Krystalls c ankömmt, so setzen wir diese Höhe = 1, und dann sind uns die Einheiten auf α und β: $\frac{c}{a}$ und $\frac{c}{b}$.

Wir haben hier bloß auf die Systeme der drei rechtwink-

ligen Dimensionen Rücksicht genommen; es ergiebt sich aber von selbst, daß in den sechsgliedrigen und dreigliedrigen Systemen dasselbe gilt für die Flächen, deren Normalen in einem der drei Hauptschnitte liegen, was hier gesagt ist für Flächen, deren Normalen in einem der zwei Hauptschnitte liegen — und es bleibt uns überhaupt nur noch die Bestimmung für solche Flächen, deren Normalen nicht in die Hauptschnitte fallen.

§. 8.

Die Durchschnittspunkte der Normalen nennen wir die Flächenorte. Im vorigen Paragraph bestimmten wir die Flächenorte für $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ u. s. w. $\boxed{\frac{1}{m}b : c \infty a}$ u. s. w., wir fragen jetzt nach dem Flächenorte von $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c}$.

Diese Fläche liegt in der Diagonalzone von $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ und $\boxed{\frac{1}{n}b : c \infty a}$. Die Diagonalzone von $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ ist bestimmt durch die Fläche $\boxed{b : \infty c \infty a}$, die Ebene der Diagonalzone geht durch den Mittelpunkt des Krystalls und durch eine Linie, die von der Normale der Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ nach der Normale der Fläche $\boxed{b \infty c \infty a}$ gezogen ist, die also den Flächenort von $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ mit dem Flächenort $\boxed{b \infty c \infty a}$ verbindet. S. Fig. 3, wo $m\frac{c}{a}$ der Flächenort von $\boxed{\frac{1}{m}a : c \infty b}$ ist, und die aus diesem Punkte mit β

nisse von Sinus zu Cosinus. In den Kreisbogen darf man keine krystallonomische Gesetzlichkeit suchen; die Analysis spricht ihre Verhältnisse unter einander als transcendente aus.

Aus dem Gesetz der Zonen, dem Grundgesetz aller krystallonomischen Entwickelung und Ausbildung ergiebt sich ein zweites nicht weniger wichtiges und allgemein gültiges Gesetz für die Krystallonomie: den Verhältnissen von Sinus zu Cosinus für alle krystallonomische Neigungen in derselben Zone liegt ein gemeinschaftliches irrationales Verhältniß zu Grunde, von welchem irrationalen Verhältnisse jedem besondern Neigungsverhältniß eine rationale Vervielfachung entspricht.

So sind für die Betrachtung dieser Verhältnisse diese zwei Theile derselben wesentlich getrennt, ihr gemeinschaftliches irrationales Grundverhältniß, und die rationalen Vervielfachungen desselben, und gerade in dieser Trennung, stellen sich diese Verhältnisse auf unserm Schema dar. Fig. 9. ist das Schema des Topas, und die angegebenen Flächen sind:

$\lvert a : b \;\infty c \rvert$	$\lvert a : \frac{1}{2}b \;\infty c \rvert$	$\lvert a : \frac{1}{3}b \;\infty c \rvert$	(Säulenflächen.)
$\lvert a : 2b \;\infty c \rvert$	$\lvert 3a : 2b \;\infty c \rvert$	$\lvert b \;\infty a \;\infty c \rvert$	
$\lvert a : b : c \rvert$	$\lvert a : b : \frac{1}{2}c \rvert$	$\lvert a : b : \frac{1}{3}c \rvert$	Octaederflächen.
	$\lvert a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c \rvert$	$\lvert a : \frac{1}{3}b : \frac{1}{3}c \rvert$	
$\lvert b : c \;\infty a \rvert$	$\lvert \frac{1}{2}b : c \;\infty a \rvert$	$\lvert b : \frac{1}{2}c \;\infty a \rvert$	Zuschärfungen.
$\lvert \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c \;\infty a \rvert$	$\lvert a : c \;\infty b \rvert$	$\lvert a : \frac{1}{3}c \;\infty b \rvert$	
		$\lvert c \;\infty a \;\infty b \rvert$	

Betrachten wir z. B. die Diagonalzone von $\lvert a : \frac{1}{3}c \;\infty b \rvert$ auf dem Schema, und bedenken, daß die Neigungsverhältnisse der Flächen gegen eine gemeinschaftliche Ebene die umgekehrten sind von denen ihrer Normalen gegen diese gemeinschaftliche Ebene, weil beiderlei Neigungen sich zu einem rechten Winkel ergänzen: so sehen wir, daß es ankommt auf die Bestimmung

$|a : \frac{1}{2}c \infty b|$ $|a : \frac{1}{4}c \infty b|$ $|a : -b \infty c|$ $|\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b \infty c|$ $|c \infty a \infty b|$.

Der Ort 1 (1) gehört der Fläche $|a : b : c|$, und ist bestimmt worden durch den Durchschnitt zweier Senkrechten, auf α in (1) und auf β in 1. Beides, (1) und 1 sind Flächenorte für $|a : c \infty b|$ und $|b : c \infty a|$. Eben so ist der Ort für $|a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c|$ bestimmt durch die Senkrechte auf α und β in ($\frac{1}{2}$) und 1, welches die Flächenorte für $|a : \frac{1}{2}c \infty b|$ und $|b : c \infty a|$ sind. Der Ort ($\frac{1}{4}$) gehört der Fläche $|a : \frac{1}{4}c \infty b|$. Die Linie von 0 nach 1 (1) enthält den Flächenort für $|a : b \infty c|$ aber in ihrer unendlichen Entfernung, da sie aus den Diagonalzonen von $|a \infty b \infty c|$ und $|b \infty a \infty c|$, deren Orte im Unendlichen von α und β liegen. Der Ort 0 gehört der geraden Endfläche $|c \infty a \infty b|$.

Der eigentliche Zusammenhang dieser Glieder ist nun mit einem Blick zu übersehen. Der Ort ($\frac{1}{2}$) ist von 1 (1) und dem gegenüberstehenden 1 durch zwei in ($\frac{1}{2}$) sich kreuzende Zonenlinien bestimmt; und auf gleiche Weise ($\frac{1}{4}$) durch zwei in ($\frac{1}{4}$) sich kreuzende Zonenlinien von 1 ($\frac{1}{2}$) nach dem gegenüberstehenden 1. Parallel der Linie von 0 nach 1 (1) können Linien gezogen werden von ($\frac{1}{2}$) nach dem gegenüberstehenden 1 ($\frac{1}{2}$), und von (1) nach 1, ein Zeichen, daß auch diese Zonenlinien den Flächenort von $|a : b \infty c|$ enthalten, daß $|a : \frac{1}{2}c \infty b|$ $|-a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c|$ und $|a : c \infty b|$ $|b : c \infty a|$ Zonen bilden, in denen die Säulenfläche $|a : -b \infty c|$ liegt. Eben so können von (1) nach dem 1 ($\frac{1}{2}$) der andern Seite und von ($\frac{1}{2}$) nach 1 (1) der andern Seite Linien gezogen werden, parallel mit der Linie, die den Flächenort von $|\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b \infty c|$ enthält, (die mit $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{2}$) bezeichnet ist), ein Beweis, daß diese Fläche auch in den von den gezogenen Linien angegebenen Zo-

nisse von Sinus zu Cosinus.
keine krystallonomische Gesetzlich
ihre Verhältnisse unter einander

Aus dem Gesetz der Zonen,
lonomischen Entwickelung und A
tes nicht weniger wichtiges und
die Krystallonomie: den Verh
Cosinus für alle krystall
derselben Zone liegt ein ge
nales Verhältniß zu Grund
nalen Verhältnisse jedem
hältniß eine rationale Verh

So sind für die Betrachtung
Theile derselben wesentlich getrenn
tionales Grundverhältniß, und d
desselben, und gerade in dieser Tr
hältnisse auf unserm Schema dar.
Topas, und die angegebenen Fläch

$a : b \infty c$	$a : \frac{1}{2}b \infty c$	$a : \frac{1}{3}b$
$a : 2b \infty c$	$3a : 2b \infty c$	$b \infty a$
$a : b : c$	$a : b : \frac{1}{2}c$	$a : b$
	$a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c$	a : [illegible]b
$b : c \infty a$	$\frac{1}{2}b : c \infty a$	$b : \frac{1}{2}c$
$\frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c \infty a$	$a : c \infty b$	$a : \frac{1}{3}c$
		$c \infty a$

Betrachten wir z. B. die Dia
auf dem Schema, und bedenken,
der Flächen gegen eine gemeinscha
sind von denen ihrer Normalen
Ebene, weil beiderlei Neigungen s
ergänzen: so sehen wir, daß es an

$$\frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{b^2}{N^2}+c^2\right]} : 1.$$

von einer solchen Einfachheit, daß man füglich, da
...isse a : b : c sich gewöhnlich in kleinen Zahlen
...ssen, von einem Ablesen dieses Grundverhältnisses
...hema sprechen kann.

§. 15.

...ieser Ausdruck nichts anders als das Verhältniß
...zum Produkte der drei Dimensionen des Krystalls.
...schaftliche Grundverhältniß für alle Rei-
...Flächen einer Zone ist das Verhältniß
...Flächen dieser Zone gemeinschaftlichen
...i. der Axe dieser Zone, zum Produkte
...mensionen des Systems. Diese Behauptung
...emeinheit ausgesprochen, bedarf noch einer nä-
...g und eines schärfern Beweises. Zuerst, daß

... $+ c^2\Big]$ die Zonenaxe ist, und zwar in der

...ukommt vom Mittelpunkt des Systems bis zur
...he, kann auf eine einfache Weise aus unserm
...wiesen werden. Die Zonenaxe ist auf der Zonen-
...chte Richtung; die Zonenebene ist im vorliegen-
...h bestimmt, daß sie durch die Zonenlinie ab
...n Mittelpunkt des Systems gelegt ist. Bezeich-
...Mittelpunkt mit O, so ist zunächst die Aufgabe,
...o die durch O auf Oab senkrecht gezogene Rich-
...Endfläche schneidet. Da die Zonenlinie bestimmt
...α und β abgeschnittenen Stücke $M\alpha$ und $N\beta$,
...uf dem entgegengesetzten α und β die Stücke

... $\frac{1}{\beta}$ = ce ab, errichte aus f und e senkrechte

... deren Durchschnittspunkt g die ver-
...rch den Mittelpunkt des Systems

en lag aber auch in der aus $\frac{mc}{a}$ auf α errichteten senkrechten Linie, er ist also durch den Durchschnittspunkt beider Senkrechten bestimmt. So ergiebt sich also dieselbe einfache Regel zur Bestimmmung des Flächenortes von $\left[\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a.\right]^{c}$: — man schneide $\frac{mc}{a}$ auf α und $\frac{nc'}{a'}$ auf α' ab, errichte aus den Punkten $\frac{mc}{a}$ und $\frac{nc'}{a'}$ auf α und α' senkrechte Linien, so ist deren Durchschnittspunkt der verlangte Flächenort.

§. 10.

Um auch hier die Anwendung dieser Regel zu erläutern, wählen wir als Beispiel das Quarzsystem. S. Fig. 6. Die hier beobachteten Flächen sind:

$\left[a : a\right]^{c}$ $\left[a : a\right]^{2c}$ $\left[a : a\right]^{3c}$

$\left[a : a\right]^{4c}$ $\left[a : \frac{1}{2}a\right]^{c}$ $\left[\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a\right]^{c}$

$\left[\frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a\right]^{c}$ $\left[\frac{1}{5}a : \frac{1}{6}a\right]^{c}$ $\left[a : a\right]^{\infty c}$

Die in der Figur punktirten Linien müssen parallel gedacht werden mit den Dimensionen a, a', a'', sind unsre α, α', α''; auf ihnen ist 0m, 0m' als Einheit $= \frac{c}{a} = \alpha$ genommen. Aus m und m' oder, wie wir uns allgemein ausdrücken, aus 1α und $1\alpha'$ Senkrechte gezogen, so ist deren Durchschnittspunkt 1(1) der Flächenort für $\left[a : a\right]^{c}$. Aus 2α und $2\alpha'$ errichtete Senkrechte schneiden sich in 2(2), im Flächenort von

$\left[\frac{2c}{a : a}\right]$ u. s. w. Aus $3a$ und $4a$ errichtete Senkrechte schneiden sich in 3(4), im Flächenort von $\left[\frac{c}{\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a}\right]$ u. s. w. Der Flächenort von $\left[\frac{\infty c}{a : a}\right]$ liegt im Unendlichen der Linie durch 1(1) und 0.

Von den Sechs- und Sechskantner-Flächen sind auf dem Schema nur von den Hälften dieser Flächen die Orte aufgezeichnet, wie die Beobachtung ihr Vorkommen gelehrt hat, und zwar die linken Hälften; von der Lage der rechten Hälften wird man auf der Figur sich leicht Rechenschaft geben können, da sie auch diese Eigenthümlichkeit des Quarzsystems treu wiedergiebt, sie selbst in eine rechte und in eine linke Hälfte zerfällt.

Der enge Zusammenhang der verschiedenen Glieder und dessen vielfache Verzweigungen sind in der Figur leicht und klar zu übersehen. Um nur Einiges hiervon hervorzuheben, so bemerken wir, wie die Fläche $\left[\frac{c}{a : \frac{1}{2}a}\right]$ in zwei abwechselnden Kantenzonen des Dihexaeder $\left[\frac{c}{a : a}\right]$ liegt, in welchen zwei abwechselnden Kantenzonen auch zwei an einander liegende Flächen der ersten sechsseitigen Säule liegen; die Verbindungslinie zweier aneinander liegenden Flächenorte 1(1) und 1(1) ist eine Kantenzonenlinie des Dihexaeder $\left[\frac{c}{a : a}\right]$; zwei solcher abwechselnden Kantenzonenlinien schneiden sich in 1(2). — Linien in 1(1) senkrecht auf a sind Diagonalzonenlinien des Dihexaeder $\left[\frac{c}{a : a}\right]$; zwei solcher abwechselnden Diagonalzonenlinien schneiden sich in 2(2); also liegt $\left[\frac{2c}{a : a}\right]$ in zwei abwechselnden Diagonalzonen des Grund-Dihexaeder. — Zwei abwechselnde

Kantenzonen des Dihexaeder $\overset{c}{\boxed{a : \tfrac{1}{2}a}}$ bestimmen wiederum $\overset{3c}{\boxed{a : a}}$; und zwei abwechselnde Diagonalzonen von $\overset{2c}{\boxed{a : a}}$ bestimmen $\overset{4c}{\boxed{a : a}}$. So bestimmt das Grund-Dihexaeder zwei andere Dihexaeder; das eine durch seine abwechselnden Kantenzonen, das andere durch seine abwechselnden Diagonalzonen, jenes bestimmt wieder ein Dihex. durch seine abwechselnden Kantenzonen, und dieses eins durch seine abwechselnden Diagonalzonen, — ein eben so einfacher als enger Zusammenhang, der auf das Klarste in dem Schema dargelegt ist. — Die Flächen der Sechs- und Sechskantner betreffend, so sehen wir, daß sie alle in die Kantenzone des Grund-Dihexaeders gehören, und daß ihre Orte auf der Kantenzonenlinie nach sehr gleichmäßig abgemessenen Intervallen bestimmt sind, nur daß wir eine Lücke bemerken zwischen 1(2) und 3(4), und diese Lücke würde ausgefüllt sein durch den Ort der Fläche $\overset{c}{\boxed{\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}a}}$, eine bei andern Systemen beobachtete Fläche; sie würde in der Kantenzone des Grund-Dihexaeders bestimmt durch die Kantenzone von $\overset{2c}{\boxed{a : a}}$, so wie $\overset{c}{\boxed{\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{4}a}}$ durch die Kantenzone von $\overset{3c}{\boxed{a : a}}$ und $\overset{c}{\boxed{\tfrac{1}{4}a : \tfrac{1}{5}a}}$ durch die Kantenzone von $\overset{4c}{\boxed{a : a}}$ bestimmt wird u. s. w.

Ich übergehe, den weitern Zusammenhang dem Leser aufzuzählen; ohne Mühe wird er ihn nun selbst verfolgen können.

Es muß überhaupt nun hinlänglich deutlich sein, wie einfach, leicht und geschwinde die Entwerfung eines solchen Schema's ist, und wie denn mit einem Schlage in diesem geometrischen Bilde Alles zugleich gegeben ist, was die oben angegebene analytische Methode nur mühsam, einzeln und stückweis ge-

geben konnte, und die bei reichlich ausgebildeten Systemen doch am Ende bei großer Anstrengung des Anschauungsvermögens demselben doch nicht alle Verzweigungen der Glieder, in Rücksicht ihres gegenseitigen Zusammenhanges, erkennen läßt.

§. 11.

Zum Schluß dieses Abschnittes gebe ich das Schema des regulären Systems mit seinen gewöhnlichern Gliedern, es dem Leser zu vielfacher und ausgebreiteter Anwendung überlassend. Die Flächenorte sind auf der Würfelfläche dargestellt. Fig. 7. stellt nur die Flächen dar, deren Normalen die Würfelfläche selbst schneiden, nicht die, von denen sie erst in ihrer weitern Ausdehnung über sich hinaus geschnitten wird, wie solche Fig. 8 auch darstellt, wo die Orte aller Flächen (nur der parallelen nicht), wo also für einen 48 Flächner die Orte seiner 24 Flächen angegeben sind, wogegen in Fig. 7. nur die Orte der 8 Flächen dargestellt sind, die sich über der Würfelfläche erheben, die eine vier und vierkantige Ecke des 48 Flächner bilden. Die dargestellten Flächen sind:

$a \; \infty a \; \infty a$ $\qquad$ $a : a \; \infty a$ $\qquad$ $a : a : a$

Flächen	
$a : \frac{1}{2}a \; \infty a$	Pyramid. Würfel.
$a : \frac{1}{3}a \; \infty a$	
$a : a : \frac{1}{2}a$	Leuzitoide.
$a : a : \frac{1}{3}a$	
$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : a$	Pyr. Octaeder.
$\frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a$	
$a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a$	48 Flächner.
$a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a$	
$a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a$	

Die diesen Flächen entsprechenden Flächenorte wird man leicht aus der gewählten Bezeichnung derselben ersehen können;

nisse von Sinus zu Cosinus. In den Kreisbogen darf man keine krystallonomische Gesetzlichkeit suchen; die Analysis spricht ihre Verhältnisse unter einander als transcendente aus.

Aus dem Gesetz der Zonen, dem Grundgesetz aller krystallonomischen Entwickelung und Ausbildung ergiebt sich ein zweites nicht weniger wichtiges und allgemein gültiges Gesetz für die Krystallonomie: den Verhältnissen von Sinus zu Cosinus für alle krystallonomische Neigungen in derselben Zone liegt ein gemeinschaftliches irrationales Verhältniß zu Grunde, von welchem irrationalen Verhältnisse jedem besondern Neigungsverhältniß eine rationale Vervielfachung entspricht.

So sind für die Betrachtung dieser Verhältnisse diese zwei Theile derselben wesentlich getrennt, ihr gemeinschaftliches irrationales Grundverhältniß, und die rationalen Vervielfachungen desselben, und gerade in dieser Trennung, stellen sich diese Verhältnisse auf unserm Schema dar. Fig. 9. ist das Schema des Topas, und die angegebenen Flächen sind:

$a : b \infty c$	$a : \frac{1}{2}b \infty c$	$a : \frac{1}{3}b \infty c$	(Säulenflächen.)
$a : 2b \infty c$	$3a : 2b \infty c$	$b \infty a \infty c$	
$a : b : c$	$a : b : \frac{1}{2}c$	$a : b : \frac{1}{3}c$	Octaederflächen.
	$a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c$	a : [illegible]b : $\frac{1}{3}$c	
$b : c \infty a$	$\frac{1}{2}b : c \infty a$	$b : \frac{1}{2}c \infty a$	Zuschärfungen.
$\frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c \infty a$	$a : c \infty b$	$a : \frac{1}{3}c \infty b$	
		$c \infty a \infty b$	

Betrachten wir z. B. die Diagonalzone von $a : \frac{1}{3}c \infty b$ auf dem Schema, und bedenken, daß die Neigungsverhältnisse der Flächen gegen eine gemeinschaftliche Ebene die umgekehrten sind von denen ihrer Normalen gegen diese gemeinschaftliche Ebene, weil beiderlei Neigungen sich zu einem rechten Winkel ergänzen: so sehen wir, daß es ankommt auf die Bestimmung

der Neigungsverhältnisse der Normalen $\frac{1}{3}(\frac{1}{3})$, $\frac{2}{3}(\frac{1}{3})$, $\frac{4}{3}(\frac{1}{3})$ gegen die Normale $(\frac{1}{3})$. Die Zonenlinie, in der diese Normalen die gerade Endfläche schneiden, steht in diesem Fall senkrecht auf der Normale $(\frac{1}{3})$, ist also die Sinuslinie für alle Neigungen dieser Zone, wogegen die Normale $(\frac{1}{3})$ der allen Neigungen gemeinschaftliche Cosinus ist. Die einzelnen Theile der Sinuslinie oder Zonenlinie stehen untereinander in rationalen Verhältnissen, da sie nach dem Zonengesetz bestimmt sind, wie man sich leicht allgemein die Nachweisung wird geben können. Das Verhältniß des Cosinus zur Sinuslinie ist also das allen Neigungsverhältnissen gemeinschaftliche Grundverhältniß. Die Bestimmung desselben ist einfach; im vorliegenden Fall

$$\cos = \sqrt{\left[1 + \left(\tfrac{1}{3}\frac{c}{a}\right)^2\right]}$$

$$\sin = \frac{c}{b}.$$

Für die Normale $\frac{1}{3}(\frac{1}{3})$ ist $\frac{1}{3}\frac{c}{b}$, für $\frac{2}{3}(\frac{1}{3})$ ist $\frac{2}{3}\frac{c}{b}$, für $\frac{4}{3}(\frac{1}{3})$ ist $\frac{4}{3}\frac{c}{b}$ der besondere Sinus, so daß wir für die Neigungen in der Diagonalzone von $\boxed{a : \frac{1}{3}c \infty b}$ gegen die durch den Mittelpunkt gelegte Fläche $\boxed{b \infty a \infty a}$ haben für:

$$\boxed{a : b : \tfrac{1}{3}c} \quad \boxed{a : \tfrac{1}{2}b : \tfrac{1}{3}c} \quad \boxed{a : \tfrac{1}{4}b : \tfrac{1}{3}c}$$

$$\sin : \cos = \sqrt{\left[1 + \left(\frac{c}{3a}\right)^2\right]} : \tfrac{1}{3}\frac{c}{b} \quad : \tfrac{2}{3}\frac{c}{b} \quad : \tfrac{4}{3}\frac{c}{b}$$

$$= \frac{b\sqrt{[3]}}{ac}\sqrt{[(3a)^2 + c^2]} : 1 \quad : 2 \quad : 4$$

Das allgemeine irrationale Grundverhältniß ist also in diesem Fall $\frac{b\sqrt{3}}{ac}\sqrt{[(3a)^2 + c^2]}, = \sqrt{3}\,b\sqrt{\left[\left(\frac{3}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right]}$ die rationalen Vervielfachungen sind 1, 2, 4, die auf dem Schema unmittelbar in die Augen treten.

§. 13.

Nicht weniger einfach sind diese Verhältnisse zu erkennen bei solchen Zonen, die in keine zwei symmetrische Hälften zerfallen, sondern wo ein Unterschied zwischen der vordern und hintern Hälfte oder rechten und linken Hälfte, wie in zwei und zweigliedrigen Systemen in allen Zonen dies der Fall ist, in denen weder |a ∞ b. ∞ c| noch |b ∞ a ∞ c| noch |c ∞ a ∞ b| liegt. Solche Zonen haben ihre nächste Beziehung auf eine in ihnen liegende Fläche der horizontalen Zone, d. h. auf eine in ihnen liegende Säulenfläche. Auf unserm Schema wäre z. B. eine solche Zone, die zwischen |a : c ∞ b| und |b : c ∞ a|; in ihr liegt die Säulenfläche |a : b ∞ c|, und es frägt sich im Allgemeinen, welche Verhältnisse statt finden für die Neigungen der Flächen in dieser Zone gegen die Säulenfläche |a : b ∞ c|. Diese Säulenfläche durch den Mittelpunkt des Systems gelegt, steht senkrecht auf der Zonenlinie zwischen |a : c ∞ b| und |b : c ∞ a|, und schneidet also diese Zonenlinie in einem Punkt, der bestimmt wird, wenn man vom Mittelpunkt des Schema, vom Ort der geraden Endfläche eine Linie senkrecht auf die Zonenlinie zieht. Eine Linie vom Mittelpunkt des Systems nach diesem Punkt gezogen, wird der Cosinus sein für die Neigung einer Normale, die diese Zonenlinie schneidet, und der Abstand des Punktes, in welchem sie die Zonenlinie schneidet, von dem Punkt, wo der Cosinus die Zonenlinie schneidet, ist der Sinus. Wir haben also auch hier einen constanten Cosinus für die Neigungen der verschiedenen Normalen gegen die Säulenfläche |a : b ∞ c|, nämlich die vom Mittelpunkte des Systems auf die Zonenlinie gezogene Senkrechte, und die Sinusse sind die Abstände der Flächenorte dieser Zonenlinie von dem Punkt, in welchem sie von der Senkrechten ge-

troffen wird. Stehen diese Abstände in einem rationalen Verhältnisse? Die Zonenlinie zwischen (1) und 1 kann nach dem Zonengesetz von den Flächenorten immer nur nach rationalen Verhältnissen getheilt werden, was leicht nachzuweisen ist, (damit hängt zusammen die Möglichkeit des Flächenausdrucks $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$), — und sie ist im vorliegenden Falle in $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$ getheilt, wenn wir von (1) an zählen, und das Stück zwischen (1) nnd 1 als Einheit nehmen. Es kommt hier alles darauf an, wie die aus dem Mittelpunkt des Schema auf die Zonenlinie gezogene Senkrechte dieselbe theilt, ob die dadurch entstandenen Theile in einem rationalen Verhältnisse stehen, ob $ra : rb$ ein rationales Verhältniß ist. In dem rechtwinkligen Dreieck acb verhalten sich aber die auf der Hypotenuse ab vom Perpendikel cr abgeschnittenen Theile wie die Quadrate der Katheten, in unserm Fall also:

$$rb : ra = \left(\frac{c}{b}\right)^2 : \left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

Die abgeschnittenen Theile stehen also in einem rationalen Verhältniß, da die Erfahrung sich dahin entschieden hat, daß die Verhältnisse $a : b : c$ nur durch Quadratwurzeln sich aussprechen, oder daß $a^2 : b^2 : c^2$ ein rationales Verhältniß ist.

Um die speciellen Sinusse zu haben, müssen wir also auf der vordern Seite zu $\frac{c^2}{a^2}$ rationale Theile von ab, d. i. rationale Theile von $\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}$ zuzählen und abziehn, und auf der hintern Seite zu $\frac{c^2}{b^2}$ gleichfalls rationale Theile von $\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}$ zuzählen oder abziehn.

§. 14.

So können wir nun den Werth des Verhältnisses von sin. : cos. in einer bestimmten Zone allgemein entwickeln. Es sei

(Fig. 10.) ab irgend eine Zonenlinie, die durch $M\alpha$ und $N\beta$ bestimmt ist, die $M\alpha$ von der Richtung α und $N\beta$ von der Richtung β abschneidet, so ist

$$\cos = \sqrt{[1 + cd^2]}$$

$$cd = \frac{MN\alpha\beta}{\sqrt{[M^2\alpha^2 + N^2\beta^2]}}$$

$$\cos = \frac{\sqrt{[M^2\alpha^2 + N^2\beta^2 + M^2N^2\alpha^2\beta^2]}}{\sqrt{[M^2\alpha^2 + N^2\beta^2]}}.$$

Da alle Sinusse nur rationale Theile von der Sinuslinie oder Zonenlinie sind, und es also gleich ist, welchen Theil wir zur Einheit nehmen, zur Bestimmung des irrationalen Grundverhältnisses von sin. : cos., so wollen wir ab dazu bestimmen,

$$ab = \sqrt{[M^2\alpha^2 + N^2\beta^2]}.$$

Benennen wir ab mit (sin.), weil die reellen Sinusse Theile von ab sind, so haben wir cos. : (sin.)

$$= \sqrt{[M^2\alpha^2 + N^2\beta^2 + M^2N^2\alpha^2\beta^2]} : M^2\alpha^2 + N^2\beta^2,$$

und wir sind zu dem Ausdruck des irrationalen Grundverhältnisses dieser Zone gekommen:

$$\sqrt{[M^2\alpha^2 + N^2\beta^2 + M^2N^2\alpha^2\beta^2]} : 1 =$$

$$MN\alpha\beta \sqrt{\left[\left(\frac{1}{M\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{N\beta}\right)^2 + 1\right]}$$

Wenn statt α und β ihre Werthe $\frac{c}{a}$ und $\frac{c}{b}$ gesetzt werden, so erleidet dieses irrationale Grundverhältniß eine noch größere Vereinfachung:

$$MN \frac{c}{a}\frac{c}{b} \sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2c^2} + \frac{b^2}{N^2c^2} + 1\right]} : \frac{M^2c^2}{a^2} + \frac{N^2c^2}{b^2}$$

$$= MN \frac{c}{ab} \sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]} : \frac{M^2c^2}{a^2} + \frac{N^2c^2}{b^2}.$$

$$\cos : (\sin) = \frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]} : \frac{1}{MN}\left(\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}\right),$$

so daß das irrationale Grundverhältniß in seiner einfachsten Gestalt folgendes ist:

$$\frac{1}{abc} \sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]} : 1.$$

Es ist von einer solchen Einfachheit, daß man füglich, da die Verhältnisse a : b : c sich gewöhnlich in kleinen Zahlen ausdrücken lassen, von einem Ablesen dieses Grundverhältnisses aus dem Schema sprechen kann.

§. 15.

Es ist dieser Ausdruck nichts anders als das Verhältniß der Zonenaxe zum Produkte der drei Dimensionen des Krystalls. Das gemeinschaftliche Grundverhältniß für alle Neigungen der Flächen einer Zone ist das Verhältniß der allen Flächen dieser Zone gemeinschaftlichen Richtung, d. i. der Axe dieser Zone, zum Produkte der drei Dimensionen des Systems. Diese Behauptung in dieser Allgemeinheit ausgesprochen, bedarf noch einer nähern Erörterung und eines schärfern Beweises. Zuerst, daß $\sqrt{\left[\frac{a^2}{n^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]}$ die Zonenaxe ist, und zwar in der Länge, die ihr zukommt vom Mittelpunkt des Systems bis zur geraden Endfläche, kann auf eine einfache Weise aus unserm Schema nachgewiesen werden. Die Zonenaxe ist auf der Zonenebene eine senkrechte Richtung; die Zonenebene ist im vorliegenden Fall dadurch bestimmt, daß sie durch die Zonenlinie ab Fig. 11. und den Mittelpunkt des Systems gelegt ist. Bezeichnen wir diesen Mittelpunkt mit 0, so ist zunächst die Aufgabe, zu bestimmen, wo die durch 0 auf 0ab senkrecht gezogene Richtung die gerade Endfläche schneidet. Da die Zonenlinie bestimmt ist durch die auf α und β abgeschnittenen Stücke $M\alpha$ und $N\beta$, so schneide man auf dem entgegengesetzten α und β die Stücke $\frac{1}{M\alpha} = cf$ und $\frac{1}{N\beta} = ce$ ab, errichte aus f und e senkrechte Linien auf α und β, so ist deren Durchschnittspunkt g die verlangte Bestimmung, wo die durch den Mittelpunkt des Systems

gelegte Zonenaxe die gerade Endfläche schneidet. Denn Of hat zur Axe des Systems eine Neigung, deren Tangente $= \frac{1}{M\alpha}$, steht also senkrecht auf Oa, dessen Neigung durch die Tangente $= M\alpha$ bestimmt ist. Aus demselben Grunde steht Oe senkrecht auf Ob. Die auf α in f gezogene senkrechte Linie fg steht zugleich senkrecht auf Of, also senkrecht auf der Ebene aOf, folglich steht die durch Of und fg gelegte Ebene senkrecht auf Oa — also auch Og senkrecht auf Oa. Aus gleichen Gründen steht die Ebene Oeg senkrecht auf Ob, also Og auch senkrecht auf Ob. Da also Og senkrecht auf Oa und Ob steht, so steht Og senkrecht auf der Ebene aOb.

Die drei Ordinaten des Punktes g sind Oc, cf, ce, diese stehen in dem Verhältniß

$$1 : \frac{1}{M\alpha} : \frac{1}{N\beta} =$$

$$1 : \frac{a}{Mc} : \frac{b}{Nc} =$$

$$e : \frac{a}{M} : \frac{b}{N}.$$

Also ist die Länge dieser Linie Og, diese Länge der Zonenaxe

$$= \sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{M} + c^2\right]}.$$

§. 16.

Nun aber müssen wir uns noch sichern gegen den Vorwurf eines unbestimmten Sprachgebrauchs. Denn wenn wir vom Verhältniß einer Richtung zu einem Andern sprechen, so können wir nur den arithmetischen Werth, also nur eine gewisse Länge dieser Richtung meinen, und sprechen wir von einer gewissen Länge dieser Richtung, so haben wir Unrecht, statt dieses Theils der Richtung uns der Richtung selbst im Ausdruck zu bedienen, wenn nicht etwa dieser Theil als ein ganz besonderer charakterisirt wäre. Wir haben aber guten Grund, die Sache so zu neh-

men, indem wir ein allgemeines Gesetz der Krystallonomie geltend machen, in Beziehung auf die krystallonomischen Größen krystallonomischer Richtungen. Jeder solcher Richtung entspricht eine irrationale Grundzahl, so daß für die verschiedenen krystallonomischen Ausdehnungen, Längen dieser Richtung nur rationale Vielfache dieser irrationalen Grundzahl statt finden. Hiedurch ist der scheinbar unbestimmte Ausdruck: „das Verhältniß einer Richtung zu einem Andern," sehr scharf bestimmt; alle einzelne Längen sind nur Theile der Richtung, nur Theile dieser irrationalen Grundzahl der Richtung, und solche eben meinen wir nicht in unserm Ausdruck, sondern die Richtung selbst, deren arithmetische Form die Grundzahl dieser Richtung ist.

Jede mögliche Kante in der von uns betrachteten Zone, und jede mögliche krystallonomische Ausdehnung derselben ist nur ein rationales Vielfaches von $\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]}$. Es wird hier hinlänglich sein, dieses nachzuweisen für den Fall, wo die Richtung dieser Kanten durch den Mittelpunkt des Systems gelegt ist — wo also nur nachzuweisen ist, daß die Länge dieser durch den Mittelpunkt gelegten Richtung, die von der Fläche $\boxed{\frac{r}{m}a : \frac{r}{n}b : \frac{r}{p}c}$ abgeschnitten wird, ein rationales Vielfaches von $\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]}$ ist, denn anders als durch Flächen in einer krystallonomischen Lage kann keine Richtung im Krystall begrenzt werden.

Aus der in Fig. 11. im vorigen §. gegebenen Construction für die Bestimmung des Punktes g, in welchem die durch den Mittelpunkt gelegte Zonenaxe die gerade Endfläche schneidet, folgt, wenn wir die Richtung c mit z, die Richtung a mit x und b mit y bezeichnen, die Gleichung für die Zonenaxe:

$$x = \frac{1}{Ma} z = \frac{a}{Mc} z$$

$$y = \frac{b}{Nc} z.$$

Die Gleichung für die Fläche $\boxed{\frac{r}{m} a : \frac{r}{n} b : \frac{r}{p} c}$ ist:

$$\frac{m}{a} x + \frac{n}{b} y + \frac{p}{c} z + r = 0.$$

Für den Durchschnittspunkt der Axe mit dieser Ebene ergeben sich die Ordinaten.

$$x = \frac{\frac{ra}{M}}{\frac{m}{M} + \frac{n}{N} + p}$$

$$y = \frac{\frac{rb}{N}}{\frac{m}{M} + \frac{n}{N} + p}$$

$$z = \frac{rc}{\frac{m}{M} + \frac{n}{N} + p}$$

Die abgeschnittene Länge der Zonenaxe ist $= \sqrt{[x^2 + y^2 + z^2]}$

$$= \frac{r \sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]}}{\frac{m}{M} + \frac{n}{N} + p}$$

ist also ein rationales Vielfaches von dem der Richtung entsprechenden Ausdrucke $\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]}$ *).

*) Aus dem Schema hätte sich dieser Werth natürlich auch entwickeln lassen, aber die Darstellung würde weniger einfach geworden sein, wegen des Gebrauchs mehrerer Zeichnungen.

Hierauf gründen sich die verschiedenen Bezeichnungsarten der Krystallflächen, die Hauysche, die vom Dr. Hessel, die vom Prof. Mohs u. s. w., deren wesentlicher Unterschied nur darin besteht, daß sie andere Richtungen im Krystall hervorheben, und durch deren (rationale) Theile die Lage der Flächen bezeichnen.

§. 17.

Wir wenden uns jetzt zur allgemeinen Bestimmung der speciellen Neigungsverhältnisse, nachdem wir gezeigt haben, daß das Grundverhältniß für jeden Kantenwinkel das Verhältniß der Kantenrichtung zum Produkt der drei Dimensionen des Krystalls ist. Nennen wir das Grundverhälniß $\frac{A}{abc}$, so hatten wir §. 14.

$$\cos : (\sin) = \frac{A}{abc} : \frac{1}{MN}\left(\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}\right),$$

und dies war das Verhältniß des cos zu der bestimmten Länge der Sinuslinie ab Fig. 12. Um nun den speciellen Sinus für die Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c}$, deren Ort in p ist, zu haben, müssen wir angeben, der wie vielste Theil die Entfernung dp ist von der Linie ab = L

$$ad = \frac{\frac{M^2}{a^2}}{\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}} L$$

$$ap = \frac{M - m}{M} L, \quad M - m = \frac{nM}{N}.$$

$$dp = ad - ap = \left(\frac{\frac{M^2}{a^2}}{\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}} - \frac{M - m}{M}\right) L.$$

$$dp = \frac{(m - M)\frac{N^2}{b^2} + \frac{mM^2}{a^2}}{M\left(\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}\right)}$$

$$dp = \frac{\frac{mM}{a^2} - \frac{nN}{b^2}}{\frac{M^2}{a^2} + \frac{N^2}{b^2}} \text{ L.}$$

Mit diesem Werth das dem (sin) entsprechende Glied in dem Verhältniß $\frac{A}{abc}$: (sin) multiplicirt, erhalten wir den des Verhältnisses für die Neigung der Normale von $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : c}$

$$\cos : \sin = \frac{A}{abc} : \frac{m}{Na^2} - \frac{n}{Mb^2}.$$

Also für das Neigungsverhältniß der Fläche selbst gegen die Säulenfläche $\boxed{\frac{1}{m}a : -\frac{1}{n}b \;\infty c}$

$$\sin : \cos = \frac{A}{abc} : \frac{m}{Na^2} - \frac{n}{Mb^2}$$

ein gewiß eben so einfacher als für den Gebrauch des Schema bequemer Ausdruck.

Wenn hier aber nur gezeigt ist, daß für die Neigungen in einer Zone gegen die in dieser Zone liegende Säulenfläche rationale Vervielfachungen eines irrationalen Grundverhältnisses statt finden — so läßt sich von hier aus leicht übersehen, wie dann auch für alle möglichen krystallonomischen Neigungen dasselbe statt findet. Denn die Neigung irgend zweier Flächen unter einander ist anzusehen als die Summe oder Differenz ihrer Neigungen gegen die in diese Zone gehörige Säulenfläche; wenn aber für die Theile eines Winkels die gesagte Eigenschaft gilt, so gilt sie auch für die Summen dieser Theile.

Denn es sei $\angle A = a \pm \alpha$

$$\operatorname{tng} a = m\sqrt{\left(\frac{1}{A}\right)}$$

$$\operatorname{tng} \alpha = n\sqrt{\left(\frac{1}{A}\right)}$$

$$\operatorname{tng} A = \frac{(m \pm n)\sqrt{(A)}}{A \pm mn.}$$

Es ist also auch die Tang von der Summe der Winkel ein rationales Vielfaches von demselben irrationalen Grundverhältniß, von welchem die Winkel selbst rationale Vielfache sind.

§. 18.

Erläutern wir das Gefundene durch einige Anwendungen. Fig. 9. ist das Schema für das System des Topas. S. §. 12. Wir bedürfen der numerischen Verhältnisse a : b c, um die Winkelverhältnisse in den Zonen angeben zu können. Annäherungsweise gilt uns für dieses Verhältniß: *)

$$a : b\ c = \sqrt{(5)} : \sqrt{(15)} : \sqrt{(16)}.$$

---

*) Herr Prof. Mohs giebt in seiner Charakteristik des naturhistorischen Mineralsystems 2te Aufl. Dresden 1821 für das System des Topases in dem von den Flächen $|a : b : \frac{1}{2}c|$ gebildeten zwei und zweikantigen Octaeder folgende als mit dem Reflexionsgoniometer gemessene Winkel an: in der Kante (a,c) 141°7′, (b,c) 101°52′ und (a,b) 90°55,

Um aus diesen Angaben unmittelbar die Verhältnisse a : b : c zu finden, hat man, wenn A den halben Winkel der Kante (b,c), B den der Kante (a,c) und C den halben Winkel der Kante (a,b) bezeichnet, das Verhältniß:

$$a^2 : b^2 : c^2 = \sec^2 A : \sec^2 B : \sec^2 C.$$

Nicht ohne Vortheil wird man sich auch in Fällen der Art, solche Verhältnisse zu entwickeln, der Methode unsers Schemas bedienen. Fig. 13. seien aa, aa die Flächenorte des Octaeders, in ihm verhalten sich $a : b : c = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$, so ist $cb = \frac{x}{z}$, $cd = \frac{y}{z}$

In der Zone von $[a : c \infty b]$ nach $[b : c \infty a]$ liegen die Flächen $[a : b : \frac{1}{2}c]$ $[a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c]$ $[- a : \frac{1}{4}b : \frac{1}{3}c]$. Sollen für die Zone die Winkelverhältnisse bestimmt werden, so haben

---

wir

und $\frac{x^2 + z^2}{y^2} = tng^2 B$, $\frac{y^2 + z^2}{x^2} = tng^2 A$, $\frac{x^2 + y^2}{z^2} = tng^2 C$,

also $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^2} = 1 + tng^2 B$, $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2} = 1 + tng^2 A$,

$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2} = 1 + tng^2 C$,

$$\text{also } \frac{1}{x^2} : \frac{1}{y^2} : \frac{1}{z^2} = \sec^2 A : \sec^2 B : \sec^2 C$$

$$a^2 : b^2 : c^2 = \sec^2 A : \sec^2 B : \sec^2 C.$$

Die Relation dieser drei Winkel unter einander ist die, daß **die Summe der Quadrate, der Cosinusse, der halben Kantenwinkel eines Octaeders, eine constante Größe ist**, $= 1$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$

wie sich aus den angegebenen Werthen für $tng A$, $tng B$, $tng C$ leicht ersehen läßt. (Nennen wir die doppelten Winkel A', B', C', so ist:

$$\cos A' + \cos B' + \cos C' = -1.)$$

Hieraus entwickelt sich $\cos^2 C = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B$

$$\cos^2 C = -\cos(A + B) \cos(A - B),$$

d. h. der Cosinus von einem der drei Winkel ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Cosinus der Summe und dem Cosinus der Differenz der beiden andern. Dieser Ausdruck empfiehlt sich besonders zur Prüfung, ob die Winkelangaben unter einander übereinstimmen, wie dies z. B. bei den vom Prof. **Mohs** angegebenen Winkeln beim Staurolith S. p. 181. Charakteristik d. nathist. Minrlst. **nicht der Fall ist**, wo aus $A = 40°22'$ $B = 65°57'$ für $C = 59°47$ sich ergiebt, statt der dortigen $62°24'$.

Das Verfahren, dessen ich mich bediene, nun in $a^2 : b^2 : c^2 = \frac{1}{\cos^2 A} : \frac{1}{\cos^2 B} : \frac{1}{\cos^2 C}$ die numerischen Werthe in den möglichst kleinsten Zahlen zu bestimmen, besteht in der Anwendung der Theorie der Kettenbrüche. Aus

$$\frac{1}{\cos^2 A} : \frac{1}{\cos^2 B} : \frac{1}{\cos^2 C} = 2{,}5177 : 9{,}0188 : 8{,}128$$

ist leicht zu sehen, daß das Verhältniß $a^2 : b^2$ zwischen $1 : \frac{7}{2}$ und $1 : \frac{11}{3}$ fällt, die dazwischen liegenden Verhältnisse, in der Folge wie sie in den kleinsten Zahlen sich ausdrücken lassen, sind:

wir $M = 1$ und $N = 1$, also $A = \sqrt{[5 + 16 + 18]} = \sqrt{39}$, und daher als Grundverhältniß dieser Zone

$$\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{[5 \,.\, 16 \,.\, 18]}},$$

und als allgemeine Form aller möglichen Verhältnisse dieser Zone

$$\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{5}\,.\,\sqrt{16}\,.\,\sqrt{18}} : \frac{m}{5} - \frac{n}{18} = \tfrac{3}{4}\sqrt{[5 \,.\, 2 \,.\, 39]} : 18m - 5n,$$

also für:

$a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c$	$\frac{3}{4}\sqrt{[5 \,.\, 6 \,.\, 13]}$: $\frac{8}{3}$,	da	$m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{3}$,
$a : b : \frac{1}{2}c$	„ „ „ „ : $\frac{13}{2}$,	„	$m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$,
$a : \infty b : c$	„ „ „ „ : 18,	„	$m = 1$, $u = 0$,
$\infty a : b : c$	„ „ „ „ : -5,	„	$m = 0$, $n = 1$,
$-a : \frac{1}{4}b : \frac{1}{3}c$	„ „ „ „ : $-\frac{38}{3}$,	„	$m = -\frac{1}{3}$, $n = \frac{4}{3}$.

$$\frac{7}{2} \qquad \frac{11}{3}$$

$$\frac{7 + 11}{2 + 3.}$$

$$\frac{2.7 + 11}{2.2 + 3.}$$

denn, wenn $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'}$ zwei Brüche, in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, so ist der zwischen ihnen liegende Bruch, der mit den möglichst kleinsten Zahlen geschrieben wird, $\frac{m + m'}{n + n'}$. Wir haben also, für $a : b$ als ersten angenäherten Werth $1 : \frac{18}{5}$, als zweiten $1 : \frac{25}{7}$; u. s. w., da der eigentliche des größern Zahlenverhältnisses zwischen $1 : \frac{7}{2}$ und $1 : \frac{18}{5}$ liegt, wie sich aus der Reihe der Kettenbrüche leicht übersehen läßt. Der Werth $a : c$ liegt zwischen $1 : \frac{13}{4}$ und $1 : \frac{16}{5}$; der erste angenäherte Werth würde also $\frac{29}{9}$ sein. Annäherungsweise hätten wir also:

$$a : b : c = 1 : \sqrt{\tfrac{25}{7}} : \sqrt{\tfrac{29}{9}}.$$

Dies Verhältniß giebt den Winkel der Säule $a : b \,\infty c$ $124°14'$ statt des Mohs schen $124°19'$, und den Kantenwinkel (a,c) $141°4'$ statt $141°7'$. Da indessen diese Verhältnisse doch auf keine Congruenz mit der Natur Anspruch machen können, so wählen wir hier die einfacheren $\sqrt{5} : \sqrt{18} : \sqrt{16} = a : b : c$.

In der Zone von $\boxed{a : c \; \infty b}$ nach $\boxed{b : \frac{1}{2}c \; \infty b}$ liegen die Flächen $\boxed{a : b : \frac{1}{3}c}$ $\boxed{-a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c}$ $\boxed{-a : b : c}$, für sie ist $N = \frac{1}{2}$ und $M = 1$, also ihr Grundverhältniß $\frac{A}{abc}$

$$= \frac{\sqrt{[5 + 4.18 + 16]}}{\sqrt{[5.18.16]}} = \frac{\sqrt{93}}{\sqrt{[5.18.16]}}.$$

$$\frac{A}{abc} : \frac{m}{Na^2} - \frac{n}{Mb^2} = \frac{\sqrt{93}}{\sqrt{[5.18.16]}} : \frac{2m}{5.} - \frac{n}{18}$$

$$= \tfrac{3}{4}\sqrt{[5.6.31]} : 36m - 5n.$$

Daher für

$\boxed{a : b : \frac{1}{3}c}$ $m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}\sqrt{[5.6.31]} : \frac{31}{3}$,

$\boxed{a : \infty b : c}$ $m = 1$, $n = 0$, „ „ „ „ $: 36$,

$\boxed{\infty a : b : \frac{1}{2}c}$ $m = 0$, $n = \frac{1}{2}$, „ „ „ „ $: -\frac{5}{2}$,

$\boxed{-a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c}$ $m = -\frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{3}$, „ „ „ „ $: -\frac{46}{3}$,

$\boxed{-a : b : c}$ $m = -1$, $n = 1$, „ „ „ „ $: -41$*).

§. 19.

Nachdem so das Verfahren, die Winkelverhältnisse im Schema zu lesen, für die Abtheilung von Krystallen, deren Natur in den drei rechtwinkligen Dimensionen ausgesprochen ist, gegeben und erläutert ist, wenden wir uns zu der Abtheilung, die sich auf drei Dimensionen in einer Ebene und eine auf diesen senkrechte Dimension bezieht, zu der Abtheilung der drei- und sechsgliedrigen Systeme.

Die im §. 15. entwickelten allgemeinen Gesetze der Kry-

---

*) Das Fortschreiten der rationalen Verhältnisse in der Art, wie hier kann hinlänglich Bürgschaft leisten, daß die numerischen Verhältnisse a : b : c nicht der Natur entsprechen, und für die etwa anzubringenden Correctionen leiten, was uns hier aber von unserm Zweck zu weit abführen würde.

stallonomie gelten auch hier, weil von der Seite der rein mathematischen Betrachtung diese Systeme gleichfalls auf drei rechtwinklige Dimensionen können bezogen werden. Auch hier sind alle krystallonomische Veränderungen derselben Richtung ausgesprochen durch rationale Vielfache derselben irrationalen Grundzahl, auch hier ist für jeden Kantenwinkel das irrationale Grundverhältniß, das Verhältniß der Kantenrichtung zum Produkt dreier rechtwinklig gedachten Dimensionen. — Wir werden hier am kürzesten zur allgemeinen Entwickelung der Neigungsverhältnisse einer Zone gelangen, indem wir die Werthe von α, $\alpha^{\cdot}$ u. s. w. ausdrücken in zwei rechtwinklige Richtungen α und $\sigma^{\cdot}$, und diese Werthe in dem oben gefundenen Ausdruck substituiren. Es sei Fig. 14. fg irgend eine Zonenlinie bestimmt durch die Stücke, die sie auf α und $\alpha^{\cdot}$ abschneidet $\mu\alpha = \frac{\mu c}{a}$ und $\nu\alpha^{\cdot} = \frac{\nu c}{a}$. Die auf α senkrechte Richtung ist $\sigma^{\cdot}$, und wenn wir das Stück ce bestimmen, das auf $\sigma^{\cdot}$ von der Zonenlinie abgeschnitten wird, so gilt dieser Werth auf $\sigma^{\cdot}$ und der Werth auf α für N und M in dem Ausdruck $\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + c^2\right]}$; — für b gilt die irrationale Grundzahl von $\sigma^{\cdot}$. Es ist aber $ce = \frac{3\mu\nu}{2\mu - \nu} \frac{c}{a\sqrt{3}}$. Wir haben also zu substituiren für

$$M = \mu$$

$$N = \frac{3\mu\nu}{2\mu - \nu}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = a \\ b = a\sqrt{3} \\ c = c \end{array}\right\} \text{ oder } \begin{array}{l} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \\ c = \frac{c}{a}. \end{array}$$

Diese Substitution giebt:

$\overset{c}{\boxed{\infty s : \infty s}}$ $\overset{\infty s}{\boxed{s : s}}$ $\overset{\infty s}{\boxed{2s : s : 2s}}$

$\overset{c}{\boxed{s : s}}$ $\overset{2c}{\boxed{s : s}}$

Daß bei der Entwerfung des Schemas hier in Bezug auf s oder σ dasselbe gilt, was in Bezug auf a (oder α) oben gesagt ist, bedarf wohl kaum einer Erinnerung.

Nach den Haüyschen Angaben ist das Verhältniß s : c $= \sqrt{5} : \sqrt{4}$ *), daher die allgemeine Form aller Winkelverhältnisse hier

$$\sqrt{\left[\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\mu\nu}\right)5+3\right]} : 2\left(\frac{m}{\nu}-\frac{n}{\mu}\right).$$

Betrachten wir zuerst die verschiedenen Zonen, die von der zweiten sechsseitigen Säule aus sich entwickeln, so sind alle Zonenlinien derselben parallel mit α, und daher gilt für sie im Allgemeinen $\mu = \mu$, $\nu = 2\mu$, also die allgemeine Form der Neigungsverhältnisse dieser Zonen

$$\sqrt{[3(5+4\mu^2)]} : 2(m-2n).$$

Es sind dies die verschiedenen Endkantenzonen, sowohl der Rhomboeder als der Drei- und Dreikantner, die im Gange der Entwickelung rhomboedrischer Systeme als besonders wichtig auftreten. Fangen wir mit der Kantenzone des zweiten stumpfern Rhomboeder an, so ist $\mu = \frac{1}{8}$, also das Grundverhältniß dieser Zone $= \sqrt{[3(5+\frac{4}{64})]} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$,

und das Neigungsverhältniß für die Fläche des zweiten stumpfern, und die Fläche des metastatischen Körpers desselben, für

$\overset{\frac{1}{4}c}{\boxed{2s : s' : 2s''}}$ $\overset{\frac{1}{8}c}{\boxed{\frac{1}{8}s' : \frac{1}{4}s''}}$ ist sin : cos $=$

$\sqrt{3} : \frac{1}{3} : 1$; für die letztere Fläche nämlich muß man für

---

*) Dies Verhältniß $\frac{s}{c}$ wird aus dem halben Kantenwinkel = k des Grundrhomboeders berechnet nach

$$\frac{s}{c} = \frac{r}{2}\sqrt{\left[\frac{\cos 3k}{\cos^3 k}\right]}.$$

der Krystallflächen, die der Herr Professor Weiß in den Abhandlungen der Berliner Academie niedergelegt hat, sehr einfach der Werth in a gefunden wird; es ist nämlich

$$\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a}} = \overset{c}{\boxed{\frac{1}{m-n}a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a}}, \text{ so}$$

daß für diese Flächen im Werthe des Sinus statt $2\left(\frac{m}{\nu} - \frac{n}{\mu}\right)$ gesetzt wird: $2\left(\frac{m-n}{\nu} - \frac{m}{\mu}\right)$.

§. 20.

Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern. Wir wählen dazu das System des Rothgiltig-Erz, dessen Schema Fig. 15. ist. Die an ihm beobachteten Glieder sind, außer dem Grundrhomboeder, das erste und zweite stumpfere, und das erste und zweite schärfere, und zwischen dem Grundrhomboeder und dem ersten stumpfern der metastatische Drei- und Dreikantner des zweiten stumpfern Rhomboeder, und zwischen dem ersten und zweiten schärfern, der metastatische Körper des Grundrhomboeders; außerdem kommt wohl noch der Drei- und Dreikantner mit 7fachem Cosinus aus der Kantenzone des Grundrhomboeders vor. Die zweite Säule, die erste Säule und die gerade Endfläche sind beobachtet, und Haüy giebt außerdem noch zwei 6gliedrige Pyramiden an, aus der Diagonalzone des Grundrhomboeders und des ersten schärfern. Die Ausdrücke dieser Glieder in den Richtungen s zu geben, ziehen wir hier im Rhomboedrischen Systeme vor:

$$\overset{c}{\boxed{2s : s : 2s}} \quad \overset{-\frac{1}{2}c}{\boxed{2s : s : 2s}} \quad \overset{\frac{1}{4}c}{\boxed{2s : s : 2s}}$$

$$\overset{-2c}{\boxed{2s : s : 2s}} \quad \overset{4c}{\boxed{2s : s : 2s}}$$

$$\overset{\frac{1}{8}c}{\boxed{\frac{1}{4}s : \frac{1}{5}s}} \quad \overset{\frac{1}{2}c}{\boxed{\frac{1}{4}s : \frac{1}{5}s}} \quad \overset{\frac{1}{2}c}{\boxed{\frac{1}{10}s : \frac{1}{11}s}}$$

c
∞s : ∞s

∞s
s : s

∞s
2s : s : 2s

c
s : s

2c
s : s

Daß bei der Entwerfung des Schemas hier in Bezug auf s oder σ dasselbe gilt, was in Bezug auf a (oder α) oben gesagt ist, bedarf wohl kaum einer Erinnerung.

Nach den Hauyschen Angaben ist das Verhältniß s : c $= \sqrt{5} : \sqrt{4}$ *), daher die allgemeine Form aller Winkelverhältnisse hier

$$\sqrt{\left[\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\mu\nu}\right)5+3\right]} : 2\left(\frac{m}{\nu}-\frac{n}{\mu}\right).$$

Betrachten wir zuerst die verschiedenen Zonen, die von der zweiten sechsseitigen Säule aus sich entwickeln, so sind alle Zonenlinien derselben parallel mit α, und daher gilt für sie im Allgemeinen $\mu = \mu$, $\nu = 2\mu$, also die allgemeine Form der Neigungsverhältnisse dieser Zonen

$$\sqrt{[3(5+4\mu^2)]} : 2(m-2n).$$

Es sind dies die verschiedenen Endkantenzonen, sowohl der Rhomboeder als der Drei- und Dreikantner, die im Gange der Entwickelung rhomboedrischer Systeme als besonders wichtig auftreten. Fangen wir mit der Kantenzone des zweiten stumpfern Rhomboeder an, so ist $\mu = \frac{1}{8}$, also das Grundverhältniß dieser Zone $= \sqrt{[3(5+\frac{4}{64})]} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$,
und das Neigungsverhältniß für die Fläche des zweiten stumpfern, und die Fläche des metastatischen Körpers desselben, für

$\frac{1}{4}$c
2s : s' : 2s''

$\frac{1}{8}$c
$\frac{1}{8}$s' : $\frac{1}{4}$s''

ist sin : cos =
$\sqrt{3} : \frac{1}{3} : 1$; für die letztere Fläche nämlich muß man für

*) Dies Verhältniß $\frac{s}{c}$ wird aus dem halben Kantenwinkel = k des Grundrhomboeders berechnet nach

$$\frac{s}{c} = \frac{r}{2}\sqrt{\left[\frac{\cos 3k}{\cos^3 k}\right]}.$$

durch die punktirten Linien angezeigt. Die Linien, die den Kantenzonen der Rhomboeder derselben entsprechen, gehen durch $\frac{7}{5(m)}\alpha$ und $\frac{7}{(m)}\alpha'$, und zwar die Kantenzonenlinie für das Rhomboeder des metastatischen Körpers des Grundrhomboedrs durch $\frac{7}{5}\alpha$ und $7\alpha'$, seines nächststumpfern durch $\frac{7}{10}\alpha$ und $\frac{7}{2}\alpha'$, und des zweiten stumpfern durch $\frac{7}{20}\alpha$ und $\frac{7}{4}\alpha'$.

Werden die Werthe $\frac{7}{5(m)} = \mu$, und $\frac{7}{(m)} = \nu$ in dem Ausdruck der Winkelverhältnisse gesetzt, so wird derselbe

$$\sqrt{\left[\frac{15(m)^2+21}{7}\right]} : \left(m\frac{(m)}{7} - n\frac{5(m)}{7}\right)2.$$

Für die Drei- und Dreikantnerflächen selbst in diesen Zonen ist immer $m = \frac{2}{(m)}$ und $n = \frac{s}{2(m)}$, daher ist das Winkelverhältniß für sie: $\sqrt{[15(m)^2+21]} : 3\sqrt{7}$

$(m) = 1$ sin ; cos $= 2 : \sqrt{7}$ met. Kpr. des Grundrhbdr.
$(m) = 2$ „ „ „ $= 3 : \sqrt{7}$ — — — erst. stumpf.
$(m) = 4$ „ „ „ $= \sqrt{29} : \sqrt{7}$ — — — 2ten —

So lassen sich aus dem allgemeinen Ausdruck der Winkelverhältnisse in dem drei- und sechsgliedrigen Systeme für die besondern Fälle Lehrsätze entwickeln, wie denn der allgemeine Werth für die Neigungsverhältnisse der Endkanten der Rhomboeder der metastatischen Körper als solcher leicht auszudrücken wäre. Diese Entwickelung ist nicht ohne Interesse und nicht ohne überraschende Beziehungen. Hier genügt es uns, die Möglichkeit und die Leichtigkeit in unserer Methode dazu zu gelangen, gezeigt zu haben. — Für die numerische Berechnung wird man meist sich dieser Substitutionen in dem allgemeinen Ausdruck nicht bedienen; — unmittelbar auf dem Schema die Verhältnisse zu lesen, und daran den leichten Calcul anzuschließen, wird meistens immer noch einfacher sein; z. B. im eben betrachteten Gegenstande bedurfte es nur der Berechnung der Li-

Die abwechselnden Flächen eines Drei- und Dreikantners bilden immer zwei gleiche, nur ihrer Stellung nach verschiedene, Rhomboeder. Solche Drei- und Dreikantner, die dieselbe Beziehung auf die verschiedenen Glieder der Hauptreihe haben, geben Rhomboeder, die untereinander wieder in derselben Beziehung stehen, wie die Glieder der Hauptreihe. So giebt der Drei- und Dreikantner $\left|\overline{\tfrac{1}{4}s \overset{\frac{1}{8}c}{:} \tfrac{1}{3}s}\right|$, der metastatische des zweiten stumpfern Rhomboeders Rhomboeder, deren nächst schärfere Rhomboeder die des metastatischen Körpers des ersten stumpfern sind: $\left|\overline{\tfrac{1}{3}s \overset{\frac{1}{4}c}{:} \tfrac{1}{4}s}\right|$; deren schärfere sind die Rhomboeder des metastatischen Körpers des Grundrhomboeders u. s. w.

Dasselbe gilt von den sechsgliedrigen Pyramiden, auch sie sind ihrer Beziehung nach Drei- und Dreikantner. In der Fig. 15. ist für die metastatischen Körper dieses Verhältniß

---

dessen Endkantenwinkel die des Kalkspath-Rhomboeders zu 180° ergänzen. Dieses invertirte Rhomboeder ist $\left|\overline{2s \overset{\frac{5}{4}c}{:} s : 2s}\right|$, und sein erstes schärfere $\left|\overline{2s \overset{\frac{5}{2}c}{:} s : 2s}\right|$, (die Abstumpfung der stumpfern Endkante von $\left|\overline{\tfrac{1}{4}s \overset{\frac{1}{2}c}{:} \tfrac{1}{4}s}\right|$), Flächen, die der Ausbildung vielleicht hier sehr nahe liegen, zumal da $\left|\overline{2s \overset{5c}{:} s : 2s}\right|$ scheint vorzukommen. — Das Rhomboeder $\left|\overline{2s \overset{\frac{5}{2}c}{:} s : 2s}\right|$ hat noch die Eigenschaft, daß es dem Rhomboeder aus den Rhomboidflächen des Quärz sehr nahe liegt — und daher also dies Rhomboeder aus den Rhomboidflächen des Quarzes demjenigen sehr nahe liegt, das die Endkantenwinkel des Kalkspath-Rhomboeders zu 180° ergänzt. Wenn zwei Rhomboeder in diesem Verhältniß stehen, so muß, wenn in dem einen $\frac{c}{s} = \sigma$ ist, in dem andern

$$\frac{c}{s} = \sqrt{\left[\frac{\sigma^2 + 4}{2\sigma^2 - 1}\right]}$$ sein.

durch die punktirten Linien angezeigt. Die Linien, die den Kantenzonen der Rhomboeder derselben entsprechen, gehen durch $\frac{7}{5(m)}a$ und $\frac{7}{(m)}a'$, und zwar die Kantenzonenlinie für das Rhomboeder des metastatischen Körpers des Grundrhomboedrs durch $\frac{7}{5}a$ und $7a'$, seines nächststumpfern durch $\frac{7}{10}a$ und $\frac{7}{2}a'$, und des zweiten stumpfern durch $\frac{7}{20}a$ und $\frac{7}{4}a'$.

Werden die Werthe $\frac{7}{5(m)} = \mu$, und $\frac{7}{(m)} = \nu$ in dem Ausdruck der Winkelverhältnisse gesetzt, so wird derselbe

$$\sqrt{\left[\frac{15(m)^2+21}{7}\right]} : \left(m\frac{(m)}{7} - n\frac{5(m)}{7}\right)2.$$

Für die Drei- und Dreikantnerflächen selbst in diesen Zonen ist immer $m = \frac{2}{(m)}$ und $n = \frac{s}{2(m)}$, daher ist das Winkelverhältniß für sie: $\sqrt{[15(m)^2+21]} : 3\sqrt{7}$

(m) = 1 sin : cos = 2 : $\sqrt{7}$ met. Kpr. des Grundrhbdr.
(m) = 2 " " " = 3 : $\sqrt{7}$ — — — erst. stumpf.
(m) = 4 " " " = $\sqrt{29}$: $\sqrt{7}$ — — — 2ten —

So lassen sich aus dem allgemeinen Ausdruck der Winkelverhältnisse in dem drei- und sechsgliedrigen Systeme für die besondern Fälle Lehrsätze entwickeln, wie denn der allgemeine Werth für die Neigungsverhältnisse der Endkanten der Rhomboeder der metastatischen Körper als solcher leicht auszudrücken wäre. Diese Entwickelung ist nicht ohne Interesse und nicht ohne überraschende Beziehungen. Hier genügt es uns, die Möglichkeit und die Leichtigkeit in unserer Methode dazu zu gelangen, gezeigt zu haben. — Für die numerische Berechnung wird man meist sich dieser Substitutionen in dem allgemeinen Ausdruck nicht bedienen; — unmittelbar auf dem Schema die Verhältnisse zu lesen, und daran den leichten Calcul anzuschließen, wird meistens immer noch einfacher sein; z. B. im eben betrachteten Gegenstande bedurfte es nur der Berechnung der Li-

nie cd, so ist de, der Cosinus, bekannt und $\sqrt{[dc^2 + 1]}$ der Sinus; der Werth von dc ist $= \sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{[1 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2]}$ — alles Beziehungen, die ohne große Uebung schon in der blosen Ansicht des Schemas können überschlagen werden.

§. 21.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit der Erläuterung einer Zonenbezeichnung, wie sie sich von dieser graphischen Darstellung aus der Anschauung und Auffassung aufdringt. Es bedarf nur die Zonenlinie zu bezeichnen in der Projection auf der geraden Endfläche, und dies geschieht durch die Angabe der abgeschnittenen Theile der Linien α und β, so daß $[M\alpha : N\beta]$ das allgemeine Zeichen einer Zone ist, deren Zonenlinie die Stücke $M\alpha$ und $N\beta$ auf α und β abschneidet. Ist diese Zonenlinie mit β parallel und schneidet das Stück $M\alpha$ auf α ab, so ist ihr Zeichen $[M\alpha ; \infty\beta]$; wäre sie die Linie β selbst, so wäre ihr Zeichen $[0\alpha : \infty\beta]$. Schneidet die Linie endlich weder von α noch von β einen Theil ab, sondern geht sie durch den Anfangspunkt von α und β (d. i. durch den Ort der geraden Endfläche), ist die Linie also zu einer vertikalen Zone gehörig: so wird ihre Lage bestimmt durch das Verhältniß zweier Linien, die aus einem Punkte in ihr auf α und β senkrecht gezogen sind, — oder durch das Verhältniß von den Stücken auf α und β, die von diesen Senkrechten abgeschnitten werden. Es sei dies Verhältniß $M\alpha : N\beta$, so ist das Zeichen dieser Zonenlinie oder Zone $0[M\alpha : N\beta]$. Wie diese vor dem Zeichen stehende Null dem zu Bezeichnenden wirklich entspricht, wird man aus Fig. 16. ersehen. Die Zonenlinie ab wird bezeichnet durch $[M\alpha : N\beta]$, die ihr parallele $a'b'$ durch $[\frac{2}{3}M\alpha : \frac{2}{3}N\beta] = \frac{2}{3}[M\alpha : N\beta]$; eben so ist das Zeichen für $a''b'' = \frac{1}{3}[M\alpha : N\beta]$, und hiernach wird es klar, daß für $a'''b'''$ das Zeichen, ganz in der Analogie, ist: $0[M\alpha : N\beta]$.

Zur bessern Verständigung wollen wir in dieser Bezeichnung die Zonen im Topassystem aufzählen. S. Fig. 9.

Die Linien für Zonen von $\lvert c : \infty a : \infty b \rvert$ nach $\lvert a : -b : \infty c \rvert$ von $\lvert a : \frac{1}{3} c : \infty b \rvert$ nach $\lvert -a : \frac{1}{2} b : \frac{1}{3} c \rvert$, von $\lvert b : c : \infty a \rvert$ nach $\lvert a : c : \infty a \rvert$, von $\lvert \frac{1}{2} b : c : \infty b \rvert$ nach $\lvert a : b : c \rvert$ sind parallel, gehen daher alle durch $m\alpha$ und $m\beta$; ihre Zeichen sind in derselben Ordnung: $0[\alpha : \beta]$, $\frac{1}{3}[\alpha : \beta]$, $1[\alpha : \beta]$, $2[\alpha : \beta]$. So wird folgende Aufzählung verständlich sein.

Von	$\lvert c : \infty a : \infty b \rvert$	nach	$\lvert a : -b : \infty c \rvert$	—	$0[\alpha : \beta]$
—	$\lvert a : \frac{1}{3} c : \infty b \rvert$	—	$\lvert -a : \frac{1}{2} b : \frac{1}{3} c \rvert$	—	$\frac{1}{3}[\alpha : \beta]$
—	$\lvert b : c : \infty a \rvert$	—	$\lvert a : c : \infty b \rvert$	—	$1[\alpha : \beta]$
—	$\lvert \frac{1}{2} b : c : \infty a \rvert$	—	$\lvert a : b : c \rvert$	—	$2[\alpha : \beta]$
—	$\lvert -a : b : \frac{1}{3} c \rvert$	—	$\lvert a : \frac{1}{3} c : \infty b \rvert$	—	$\frac{1}{3}[\alpha : \frac{1}{2}\beta]$
—	$\lvert b : \frac{1}{2} c : \infty a \rvert$	—	$\lvert a : c : \infty b \rvert$	—	$1[\alpha : \frac{1}{2}\beta]$
—	$\lvert a : \frac{1}{4} b : \frac{1}{3} c \rvert$	—	$\lvert a : b : c \rvert$	—	$3[\alpha : \frac{1}{2}\beta]$
—	$\lvert c : \infty a : \infty b \rvert$	—	$\lvert a : \frac{1}{2} b : \infty c \rvert$	—	$0[\frac{1}{2}\alpha : \beta]$
—	$\lvert b : \frac{1}{2} c : \infty a \rvert$	—	$\lvert a : -b : \frac{1}{2} c \rvert$	—	$\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\alpha : \beta]$
—	$\lvert b : c : \infty a \rvert$	—	$\lvert a : -b : c \rvert$	—	$1[\frac{1}{2}\alpha : \beta]$
—	$\lvert \frac{1}{2} b : c : \infty a \rvert$	—	$\lvert a : c : \infty b \rvert$	—	$2[\frac{1}{2}\alpha : \beta]$
—	$\lvert c : \infty a : \infty b \rvert$	—	$\lvert \frac{1}{2} a : \frac{1}{3} b : \infty c \rvert$	—	$0[\frac{1}{3}\alpha : \frac{1}{2}\beta]$
—	$\lvert -a : \frac{1}{2} b : \frac{1}{3} c \rvert$	—	$\lvert a : -b : \frac{1}{3} c \rvert$	—	$\frac{1}{3}[\frac{1}{3}\alpha : \frac{1}{2}\beta]$
—	$\lvert b : \frac{1}{2} c : \infty a \rvert$	—	$\lvert a : \frac{1}{3} c : \infty b \rvert$	—	$1[\frac{1}{3}\alpha : \frac{1}{2}\beta]$
—	$\lvert -a : \frac{1}{4} b : \frac{1}{3} c \rvert$	—	$\lvert a : b : \frac{1}{3} c \rvert$	—	$\frac{5}{3}[\frac{1}{3}\alpha : \frac{1}{2}\beta]$

u. s. w.

So ordnen durch die Zeichen sich die Zonen in Zonengruppen, nach den Endgliedern derselben, die ihnen gemeinschaftlich sind. Alle Zonen, $1[\alpha : \beta]$, $2[\alpha : \beta]$... $m[\alpha : \alpha]$ haben die Säulenfläche $\lvert a : b : \infty c \rvert$ gemeinschaftlich; überhaupt haben haben alle Zonen $\frac{1}{P}$ $[M\alpha : N\beta]$ die Säulenfläche $\lvert \frac{1}{M} a : \frac{1}{N} b : \infty c \rvert$

gemeinschaftlich. Außer dieser Säulenfläche liegen im Zeichen noch mehrere Elemente, die der Anschauung der Zonen äußerlich am Krystall dienen. Nämlich in dem Zeichen $\frac{1}{P}[M\alpha : N\beta]$ liegt unmittelbar, daß in dieser Zone außer der Säulenfläche $\boxed{\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}b : \infty c}$ noch liegen die Flächen $\boxed{\frac{1}{M}a : \frac{1}{P}c : \infty b}$ und $\boxed{\frac{1}{N}b : \frac{1}{P}c : \infty a}$, wie aus der Herleitung dieser Bezeichnungsart sich von selbst ergiebt. Welche Modification dies z. B. für $0[M\alpha : N\beta]$ erleidet, wird nicht schwierig sein zu übersehen; die Säulenfläche $\boxed{\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}b : \infty c}$ bleibt diese Zone, aber $\boxed{\frac{1}{M}a : 0c : \frac{0}{0}b}$ und $\boxed{\frac{1}{N}b : 0c : \frac{0}{0}a}$ fallen hier in eine Fläche $\boxed{c : \infty a : \infty b}$ zusammen, da diese $= \boxed{\frac{1}{M.0}a : c : \frac{1}{0}b}$ $= \boxed{\frac{1}{N0}b : c : \frac{1}{0}a}$ ist.

Daß in Hinsicht der Vorzeichen, Plus und Minus, um die Lage der Zonenlinie zu bestimmen, ob rechts oder links, vorne oder hinten, dasselbe gilt, was bei der Unterscheidung der Lage der Flächen in ihren Zeichen, versteht sich von selbst.

§. 22.

Dasselbe Princip, wonach die Zonen der Systeme mit drei rechtwinkligen Dimensionen bezeichnet sind, erleidet keine Schwierigkeit in der Anwendung auf die Bezeichnung der Zonen der drei- und sechsgliedrigen Systeme. Hier wird die Lage der Zonenlinie in der Projection auf der geraden Endfläche bezeichnet durch die Angabe der Stücke, die sie auf α und α' abschneidet

(oder bei rhomboedrischen Systemen auf σ und $\sigma^{\cdot}$, da es für die äußere Betrachtung Vorzüge haben kann, diese Richtungen hier hervorzuheben), so daß $\frac{1}{p}[M\alpha : N\alpha^{\cdot}]$ das allgemeinste Zeichen einer Zone hier ist. Auf dem Schema des Quarzsystems Fig. 6. wäre demnach $(\alpha : 2\alpha^{\cdot})$ die Kantenzone des Grunddihexaeder, $2(\alpha : 2\alpha^{\cdot})$ dieselbe Zone von $\overset{2c}{\boxed{a : a}}$, $3(\alpha : 2\alpha)$ dieselbe Zone von $\overset{3c}{\boxed{a : a}}$ u. s. w. Die Diagonalzonen von diesen Dihexaedern in derselben Folge sind $\frac{4}{3}(\alpha : \alpha^{\cdot})$, $\frac{8}{3}(\alpha : \alpha^{\cdot})$, $\frac{12}{3}(\alpha : \alpha^{\cdot})$ u. s. w. $\frac{2}{3}(\alpha : \alpha^{\cdot})$ die Kantenzonen des Rhomboeders $\overset{c}{\boxed{a : a}}$. Im rhomboedrischen Systeme Fig. 15. $[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$ die Kantenzone des Grundrhomboeders, $2[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$ die Kantenzone des ersten schärfern, $4[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$ dieselbe Zone des zweiten schärfern $= 2^2[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$; die des dritten würde $2^3[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$ sein. Auf gleiche Weise sind die Kantenzonen des ersten, zweiten u. s. w. stumpfern Rhomboeders $\overline{2}^{1}[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$, $\overline{2}^{2}[\sigma : \frac{1}{2}\sigma]$ u. s. w. Die Kantenzonen mit geraden Potenzen von 2 vor der Klammer liegen auf einer Seite, sind einer Ordnung, die mit ungeraden Potenzen sind anderer Ordnung, ganz dasselbe, was von der Lage der Rhomboederflächen der Hauptreihe selbst gilt — so daß das allgemeine Zeichen der Kantenzone des m ten Rhomboeders aus der Hauptreihe wäre $(-2)^{\pm m}[\sigma : \frac{0}{2}\sigma]$.

Für die oben §. 20. betrachteten abwechselnden Kantenzonen des metastatischen Drei- und Dreikantners sind die Zeichen $7[\sigma : \frac{1}{5}\sigma]$, $\frac{7}{2}[\sigma : \frac{1}{5}\sigma]$, $\frac{7}{4}[\sigma : \frac{1}{5}\sigma]$, nämlich für die gedachten Zonen von $\overset{\frac{1}{2}c}{\boxed{\frac{1}{4}s : \frac{1}{5}s}}$, $\overset{\frac{1}{4}c}{\boxed{\frac{1}{4}s : \frac{1}{5}s}}$, $\overset{\frac{1}{8}c}{\boxed{\frac{1}{4}s : \frac{1}{5}s}}$. — So weit ist die Anwendung desselben Princips der Zonenbezeichnung auf die drei- und sechsgliedrigen Systeme ohne Schwierigkeit,

nur bei der Anwendung auf die vertikalen Zonen dieser Systeme könnte man einen Augenblick anstehen, und wirklich erlauben auch die drei Dimensionen in einer Ebene hier nicht dieselbe mathematische Einfachheit im allgemeinen Ausdruck. Die Analogie fordert, daß wir die Linie der vertikalen Zone so bezeichnen, daß die Säulenfläche, die in dieser Zone liegt, unmittelbar im Zonenzeichen zu lesen ist. Dieses wird erreicht durch die Angabe des Verhältnisses der Stücke, die auf α und α' abgeschnitten werden durch zwei aus einem Punkte der Zonenlinie auf sie gezogene Senkrechte. Das Zeichen solcher Zone, gegenüber der Zone $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha']$, ist $0[M\alpha : N\alpha']$. Es ist hier aber, wenn der Zonenlinie $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha]$ eine Vertikalzonenlinie parallel geht, das Zeichen für diese $\frac{0}{\sqrt{3}}[M\alpha : N\alpha]$ d. h. M und N sind in diesem Zeichen nicht gleich dem M und N in $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha]$. In Fig. 17. ist cf parallel mit $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha']$, und die von den Senkrechten ga und gb abgeschnittenen Stücke verhalten sich wie cd und ce, (beides die mittleren Richtungen σ, und σ'), weil $\angle\alpha = \alpha'$ und $\angle\beta = \beta'$. Demnach würden die vertikalen Zonen, z. B. im Quarzsystem s. Fig. 6. seien: $0[\alpha : \alpha]$, $0[3\alpha : 4\alpha]$, $0[4\alpha : 5\alpha]$, $0[5\alpha : 6\alpha]$, von $\overline{\left|\infty a : \infty a\right|}^{\,c}$, nach $\overline{\left|\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a\right|}^{\,c}$, nach $\overline{\left|\frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a\right|}^{\,c}$ nach $\overline{\left|\frac{1}{5}a : \frac{1}{6}a\right|}^{\,c}$ u. s. w. Die in diesen Zonen liegenden Säulenflächen sind $\overline{\left|\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a\right|}^{\,\infty c}$, $\overline{\left|\frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a\right|}^{\,\infty c}$ u. s. w. — Es liegt nämlich allgemein in der Zone $0[M\alpha : N\alpha]$ die Säulenfläche

$$\overline{\left|\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}a\right|}^{\,\infty c}.$$

In der Zone $\frac{1}{P}[M\alpha' : N\alpha'']$ sind für die Auffassung dieser Zone in der äußern Betrachtung des Krystalls unmittelbar in diesem Zeichen gegeben die Flächen $\boxed{\frac{2}{M}a : \frac{1}{M}a' : \frac{2}{M}a'' \quad \frac{1}{P}c}$ und $\boxed{\frac{2}{N}a' : \frac{1}{N}a'' : -\frac{2}{N}a \quad \frac{1}{P}c}$, die in dieser Zone liegen; und die ihr angehörige Säulenfläche ist $\boxed{\frac{1}{M+N}a : \frac{1}{2M-N}a \quad \infty c}$, (da in Fig. 17. eb : ga, wenn ef parallel mit der Zonenlinie $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha]$ ist, sich verhält wie $2M-N : M+N$). — In Hinsicht der Lage auf α, α', α'' und ihre entgegengesetzten Enden kann keine Schwierigkeit eintreten, zumal da hier auf dem Schema alles unmittelbar angeschaut werden kann.

§. 23.

Die Bezeichnung der Zonen läßt sogleich die wesentlichste Eigenschaft derselben erkennen, nämlich ihr irrationales Grundverhältniß, diejenige Eigenschaft, deren weiteres Studium die größte Fruchtbarkeit für die Krystallonomie verspricht. Es ergiebt sich nämlich aus der Darstellung der beiden vorigen Paragraphe, daß für die Zone $\frac{1}{P}[M\alpha : N\beta]$ das Grundverhältniß ist $\frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{b^2}{N^2}+\frac{a^2}{P^2}\right]}$ — daß also

für $\frac{1}{P}[M\alpha : \infty\beta]$. $\quad \frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2}+\frac{c^2}{P}\right]}$

für $\frac{1}{P}[\infty\alpha : N\beta]$. $\quad \frac{1}{abc}\sqrt{\left[\frac{b^2}{N^2}+\frac{c^2}{P^2}\right]}$

für $0[M\alpha : N\beta]$. $\frac{1}{abc} \sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2}\right]}$:

das Grundverhältniß ist. Das besondere Verhältniß der genannten Zonen ist:

für $\frac{1}{P}[M\alpha : N\beta]$ - $\frac{1}{abc} \sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} + \frac{c^2}{P^2}\right]} : \frac{m}{Na^2} - \frac{n}{Mb^2}$

für $\frac{1}{P}[M\alpha : \infty\beta]$, $\frac{1}{abc} \sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{c^2}{P}\right]} : \frac{n}{Mb^2}$

für $\frac{1}{P}[\infty\alpha : N\beta]$. $\frac{1}{abc} \sqrt{\left[\frac{b^2}{N^2} + \frac{c^2}{P}\right]} : \frac{m}{Na^2}$

für $\frac{1}{\infty}[M\alpha : N\beta]$. $\frac{1}{abc} \sqrt{\left[\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2}\right]} : \frac{m}{Na^2} + \frac{n}{Mb^2}$

Die Herleitung dieser Verhältnisse ergiebt sich, wenn man bedenkt, daß $\frac{M}{P}$ und $\frac{N}{P}$ im Zonenzeichen dasselbe bedeuten, was wir oben §. 14. in der Herleitung des allgemeinen Ausdrucks der Winkelverhältnisse mit M und N bezeichneten.

Eben so in den sechs- und dreigliedrigen Systemen: das Verhältniß in der Zone $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha]$ ist

$$\sqrt{\left[4\left(\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2} - \frac{1}{MN}\right)\frac{a^2}{c^2} + \frac{1}{P^2}3\right]} : 2\left(\frac{m}{N} - \frac{n}{M}\right),$$

siehe §. 19, wo nur μ, ν statt der hier gebrauchten $\frac{M}{P}$ und $\frac{N}{p}$ stehen. — Für die vertikale Zone $0[M\alpha : N\alpha]$ ist das Verhältniß

$$\sqrt{3} \sqrt{\left[4\left(\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2} - \frac{1}{MN}\right)\frac{a^2}{c^2}\right]} : 2\left(\frac{2m-n}{N} - \frac{m-2n}{M}\right)$$

$$= \frac{a}{c} \sqrt{3} \sqrt{\left[\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2} - \frac{1}{MN}\right]} : \frac{2m-n}{N} - \frac{m-2n}{M} \text{ *)}.$$

§. 24.

*) Dieses Verhältniß ist oben nicht entwickelt, hat aber in seiner Entwickelung auch weiter keine Schwierigkeit. Zur Erläuterung

§. 24.

Diese Bezeichnung ist auf der wirklichen Gegenseite des Begriffs der Zonen gegründet, von der, worauf der Herr Professor Weiß seine Bezeichnung gegründet hat, ist also wesentlich dieselbe, und deshalb frei vom Vorwurf unnützer Mehrung der Terminologie. Vorliegende Bezeichnung giebt die Zonenebene, bezeichnet diese, dagegen der Herr Professor Weiß die Normale dieser Ebene, die auf dieser Zonenebene senkrecht stehende Zonenaxe bezeichnet. Die senkrechte Richtung ist aber eine wirklich entgegengesetzte Richtung, hat zu den Grundrichtungen des Krystalls dasselbe nur umgekehrte Verhältniß; daher beide Bezeichnungsarten gleichwerthig sind. Dem gemäß ist auch die Verwandlung des einen Zeichens in das andere. Herr Prof. Weiß bezeichnet die Zonenaxe in den Systemen mit drei rechtwinkligen Dimensionen durch das Verhältniß der Stücke, die von a, b, c

---

mögen ihm die im vorigen Paragraph angeführten vertikalen Zonen des Quarzsystems dienen. Die Angaben von Hauy und die Messungen von Malus und Philipps entsprechen dem Verhältniß $1 : \sqrt{[1 + \frac{1}{5}]}$ für a : c; neuere Angaben vom Professor Mohs in seiner Charakt. d. n. M. liegen zwischen $1 : \sqrt{[1 + \frac{1}{5}]}$ und $1 : \sqrt{[1 + \frac{1}{4}]}$, so daß diesen am nächsten $1 : \sqrt{\left[1 + \frac{1+1}{5+4}\right]} = \sqrt{9} : \sqrt{11}$ für a : c liegt. Wir bedienen uns hier der ältern Angaben, wonach a : c $= \sqrt{5} : \sqrt{6}$; dann wird für die Verhältnisse in den vertikalen Zonen, der Ausdruck:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \sqrt{\left[\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2} - \frac{1}{MN}\right]} : \frac{2m - n}{N} - \frac{m - 2n}{M}$$

$$o[\alpha : \alpha] \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} : 2 : 4 : 6 : 8$$

$$o[3\alpha : 4\alpha] \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} : 2\sqrt{13}$$

$$o[4\alpha : 5\alpha] \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} : 2\sqrt{21}$$

$$o[5\alpha : 6\alpha] \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} : 2\sqrt{31}.$$

abgeschnitten werden, durch drei aus einem Punkte der Zonenaxe auf a, b, c gezogene Senkrechte; wenn die Zonenaxe durch den Mittelpunkt des System's gelegt ist, so daß sein allgemeines Zeichen wäre $\left(\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}b : \frac{1}{P}c\right) = \left(\frac{P}{M}\frac{a}{c} : \frac{P}{N}\frac{b}{c} : 1\right)$, — und diesem Zeichen entspricht in unsrer Bezeichnungsart $\left[\frac{M}{P}\frac{c}{a} : \frac{N}{P}\frac{c}{b}\right] = \frac{1}{P}[M\alpha : N\beta]$. Das Zeichen $\frac{1}{P}[M\alpha : N\beta]$ bezeichnet die Ebene, die durch $\frac{M\alpha}{P}$, $\frac{N\beta}{P}$ und 1 gelegt ist, deren vollständiges Zeichen also wäre $\left|\frac{M}{P}\frac{c}{a} : \frac{N}{P}\frac{c}{b} : 1\right| = \left|M\frac{1}{a} : N\frac{1}{b} : P\frac{1}{c}\right|$; daß die hierauf senkrecht stehende Zonenaxe durch $\frac{P}{M}\frac{a}{c}$ und $\frac{P}{N}\frac{b}{c}$ und 1 bestimmt ist, ergiebt sich aus §. 17., und es folgt ihr Zeichen $\left(\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}b : \frac{1}{P}c\right)$.

Daher ist für

$\frac{1}{P}[M\alpha : \infty\beta]$ beim H. M. $\left(\frac{1}{M}a : \frac{1}{P}c : \frac{1}{\infty}b\right)$

$\frac{1}{P}[\infty\alpha : N\beta]$ „ „ „ $\left(\frac{1}{N}b : \frac{1}{P}c : \frac{1}{\infty}a\right)$

$\frac{1}{\infty}[M\alpha : N\beta]$ „ „ „ $\left(\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}b : \frac{1}{\infty}c\right)$.

Dieselbe Umkehrung der Verhältnisse bei der Verwandlung des einen Zonenzeichens in das andere findet statt bei den drei- und sechsgliedrigen Systemen. Es sei Fig. 18. ab die Zonenlinie $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha]$, so schneidet die auf der Ebene dieser Zone senkrecht stehende, durch den Mittelpunkt des Krystalls gelegte Zonenaxe die gerade Endfläche in g, welcher Punkt durch Senkrechte

in d und f auf α und α bestimmt ist, und wo $de = \frac{P}{N\alpha}$, $ef = \frac{P}{M\alpha}$ ist, aus Gründen, die denen in §. 17. angegebenen, beim Verfahren die Zonenaxe in Systeme von drei rechtwinkligen Dimensionen zu bestimmen, ganz analog sind. Wenn nun auch hier die Lage der Zonenaxe durch das Verhältniß der Stücke ausgedrückt wird, die auf a, a, c abgeschnitten werden von Linien die aus einem Punkte der Zonenaxe senkrecht auf a, a, c gezogen werden, so ist dies Verhältniß für die Zonenaxe von $\frac{1}{P}[M\alpha : N\alpha] = \left(\frac{P}{M}\frac{a}{c} : \frac{P}{N}\frac{a}{c} : 1\right) = \left(\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}a : \frac{1}{P}c\right)$. Für die Zone $0[M\alpha : N\alpha]$, wo unsere Zonenlinie durch das Verhältniß der auf α und α von den Senkrechten abgeschnittenen Theile bezeichnet ist, wird in der Bezeichnung der Zonenaxe das Verhältniß der Stücke von a und $\underline{a}$ angegeben werden, die, nicht Senkrechte, sondern die sie selbst auf diesen Richtungen abschneidet, da für diese Abtheilung von Zonen die Zonenaxe immer in der Ebene der a, a', a'', liegt; und dies ist $\left(\frac{1}{M}a : \frac{1}{N}a : 0c\right)$.

Dritter Abschnitt.

Verfahren, die Neigungsverhältnisse in den Flächen durch das Schema zu finden.

§. 25.

Das genauere Studium der Flächen eines Krystalls ist wichtig, sie sind das Moment der Thätigkeit des ganzen Krystalls in einer bestimmten Richtung. Nichts tritt eigenthümlicher und bestimmter hervor, physikalisch und mathematisch, als die Richtung. So wie der Richtung eine irrationale Grundzahl

entspricht, die für alle bestimmte Längen der Richtungen nur eine rationale Vervielfachung erleidet, wie jeder Zone ein irrationales Grundverhältniß entspricht — so entspricht jeder Krystallfläche ein irrationales Grundverhältniß, von welchem das Neigungsverhältniß irgend eines ihrer ebenen Winkel nur ein rationales Vielfache ist. Die Neigungsverhältnisse für alle mögliche, krystallonomische ebene Winkel einer Fläche sind rationale Vielfache eines gemeinschaftlichen irrationalen Grundverhältnisses, so daß die Natur einer Fläche durch dieses ihr irrationales Grundverhältniß auf das Bestimmteste gegen jede andere individualisirt ist. Jede Fläche behauptet in ihrer ganzen Entwickelung eine scharf begrenzte Individualität, deren arithmetische Grundform ihr irrationales Grundverhältniß, deren geometrisches ihre Beziehung auf die Dimensionen des Systems ist.

Das Grundverhältniß jeder Fläche ist das Verhältniß ihrer Richtung, d. h. ihrer Normale zum Produkte der drei rechtwinkligen Dimensionen des Krystalls. Je zwei auf einander senkrecht stehende Richtungen in der Krystallfläche stehen immer gegen einander in diesem irrationalen Verhältniß, — das Individuelle für jede Fläche ist das irrationale Verhältniß zweier Richtungen in ihr, die auf einander ~~senkrecht~~ stehen, das Verhältniß ihrer Dimensionen. Die Flächendimensionen sind die Dimensionen des Systems in eine bestimmte Richtung hineingebildet.

So tritt uns die Beziehung jeder Richtung in der Fläche zu diesen Senkrechten, zu den Dimensionen der Fläche, als die nächste entgegen, und wir werden jede Richtung bestimmen durch das Verhältniß der Theile von den Dimensionen, die sie von ihnen abschneidet, d. h. durch das Verhältniß ihrer Neigung gegen die Dimensionen.

§. 26.

In unserm Schema, wo die Flächenorte auf die gerade Endfläche projicirt sind, sind sowohl das irrationale Grundver-

hältniß der Dimensionen der geraden Endfläche unmittelbar zu lesen, als auch die rationalen Verhältnisse der Dimensionen für die verschiedenen Richtungen in der geraden Endfläche, die durch ihren Conflikt mit andern Flächen in ihr hervorgerufen werden, für die Richtungen, die sie mit irgend einer andern Fläche gemein hat. Jenes, das irrationale Grundverhältniß ihrer Dimensionen ist das Verhältniß der Dimensionen des Krystalls $a : b$, das stets für zwei auf einander senkrecht stehende Richtungen gilt. Denn es seien Fig. 19. a' und b' zwei andere auf einander senkrecht stehende Richtungen, so ist ihr irrationales Verhältniß dasselbe, welches für $ed : fg$ gilt, wenn $fg \perp b'$; $ed : fg$ ist aber, wenn fg durch ma und nb bestimmt ist,

$$= \frac{mnab}{\sqrt{[m^2a^2 + n^2b^2]}} : \sqrt{[m^2a^2 + n^2b^2]} = mnab : m^2a^2 + n^2b^2.$$

Das irrationale Verhältniß von $a' : b'$ ist also $ab : 1$, oder $= a : b$.

Was die rationalen Verhältnisse betrifft, für die verschiedenen Richtungen in ihr, die durch den Conflikt mit andern Flächen in ihr bestimmt werden, so dürfen wir nur bedenken, daß die Linie, die von dem Ort der geraden Endfläche nach einem andern Flächenorte gezogen ist, senkrecht steht auf der Richtung, die die gerade Endfläche mit der andern Fläche gemein hat, senkrecht auf der Richtung, in welcher die gerade Endfläche von der andern Fläche geschnitten wird. Die Verbindungslinien des Flächenorts der geraden Endfläche mit den andern Flächenorten des Schemas sind die Linien, die senkrecht stehen auf den Durchschnittslinien der geraden Endfläche mit den andern Flächen, — sind die Normalen dieser Durchschnittslinien, die Normalen der Seiten der geraden Endfläche. Für die geometrische Construction der verschiedenen Seiten der geraden Endfläche bedarf es also nur, daß wir auf diesen vom Flächenorte der geraden Endfläche auslaufenden Radien, Normalen, senkrechte Linien errichten, und den arithmetischen Ausdruck der Neigungen der Seiten gegen die Dimensionen der geraden Endfläche anbelan-

gend, wissen wir, daß diesem das umgekehrte Neigungsverhältniß der Normalen gegen die Dimensionen entspricht, welches Verhältniß unmittelbar vom Schema abzulesen ist.

§. 27.

Was wir hier in Bezug auf die gerade Endfläche gesehen haben, wird von jeder andern Fläche, auf der die Projection der Flächenorte entworfen ist, gelten, und wir wären im Besitz der Methode, wie die graphische Darstellung die gesuchten Winkelverhältnisse giebt, nachdem wir uns über die Art verständigt haben, wie auf jeder beliebigen krystallonomischen Fläche die Projection zu entwerfen sei. Da wir aber zu dem uns Vorliegenden auf eine einfachere und davon unabhängige Weise kommen können, und der berührte Gegenstand ein allgemeineres, und für gewisse Krystallabtheilungen sehr wichtiges Interesse hat, so werden wir ihn in einem besondern Abschnitt behandeln.

Jene Radien sind die Durchschnittslinien der verschiedenen Zonenebenen mit der geraden Endfläche, die durch die Normalen der geraden Endfläche und der andern Ebenen bestimmt sind; die Neigungen dieser Radien sind die der Zonenebenen, weil die gerade Endfläche auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt aller dieser Zonenebenen senkrecht steht, also auch senkrecht auf allen diesen Zonenebenen.

Für jede andere Fläche sind die Neigungsverhältnisse aller der Zonenebenen zu bestimmen, die durch ihre Normale und die Normalen irgend anderer Flächen ihre Bestimmung erhalten; — denn die ebenen Winkel der Flächen sind keine andere, als die Neigungen der Zonenaxen unter einander. Verbinden wir nun den Flächenort irgend einer andern Fläche als der geraden Endfläche mit den übrigen Flächenorten, so sind diese so gezogene Radien wiederum die Durchschnittslinien der gedachten Zonenebenen mit der geraden Endfläche, deren Neigungen zu bestimmen uns vorliegt. Die Neigungen dieser Radien untereinander sind hier aber nicht identisch mit den Neigungen der Zonenebenen, weil

sie hier nicht entstanden sind durch eine Durchschnittsebene, die auf den Zonenebenen senkrecht steht. Es ist hier ein schiefer Durchschnitt der Zonenebenen, wodurch die Radien entstanden sind; die Neigungsverhältnisse der Radien bedürfen also, damit sie die Neigungsverhältnisse der Zonenebenen werden, gleichsam einer Correction, deren Element die Schiefe des Durchschnitts wäre. Diese Correction wäre allen Neigungsverhältnissen der Radien desselben Ortes gemeinschaftlich, und wir können wohl von hier aus schon übersehen, daß dieses Gemeinschaftliche ein Element des gemeinschaftlichen Grundverhältnisses der Fläche sein wird, wozu noch das gemeinschaftliche Verhältniß für die Neigungen der Radien, ab : 1, kommen muß; und wir übersehen auch wohl weiter, daß die rationalen Vervielfachungen allein von den rationalen Verhältnissen der Radien abhangen werden.

§. 28.

Von einer andern und allgemeinern Seite der Betrachtung her scheint sich diese sogenannte Correction am einfachsten zu ergeben. Es wurde verlangt für jede in vorliegender Absicht zu betrachtende Fläche, daß auf ihr die Projection der Flächenorte entworfen würde, um so die Schiefe der Durchschnittsebene nicht berücksichtigen zu dürfen. Es giebt aber eine Fläche, die die Projectionen aller Flächen in sich begreift, die in die Verschiedenheit der Krystallflächen noch nicht eingegangen ist, aus der heraus sich alle Krystallflächen erst individualisiren — das ist die Kugelfläche. — Statt die Normalen von der geraden Endfläche oder von irgend einer andern begrenzen lassen, lassen wir sie von der Kugelfläche begrenzen. Fig. 20. ist die Projection der Flächenorte für das System des Vesuvian auf die Kugelfläche, — Fig. 21. dieselbe auf die gerade Endfläche *). Auf

*) Die angegebenen Flächenorte gehören zu:

c : ∞a : ∞a	a : a : c	$\frac{1}{2}$a : a : c
a : ∞a : ∞c	a : ∞a : c	$\frac{1}{4}$a : a : c

der Kugelfläche ist jede Zonenebene eine größte Kreisebene, jede Zonenlinie ein größter Kreis. — Nachdem die vier Flächenorte des Grundoctaeders auf die Kugelfläche, nach den aus den Messungen sich ergebenden Neigungen der Normalen der Octaederflächen, aufgezeichnet sind, so können die Orte für die übrigen Flächen nach ihrem bekannten Zusammenhange mit den Flächen des Grundoctaeders durch Ziehung größter Kreise aufgetragen werden. Nämlich durch je zwei anliegende Flächenorte gezogene größte Kreise bestimmen durch ihre vier Durchschnittspunkte e die Flächenorte der zweiten vierseitigen Säule. Durch die gegenüberstehenden Flächenorte des Octaeders gelegte größte Kreise bestimmen durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt den Ort der geraden Endfläche, und durch ihre Durchschnitte mit dem Kreise, der durch die Flächenorte der zweiten vierseitigen Säule gelegt ist, bestimmen sie die Flächenorte der ersten vierseitigen Säule b. Die Verbindung des Ortes der geraden Endfläche mit dem der zweiten vierseitigen Säule, durchschneidet die Kantenzone des Octaeders in d, d. i. in den Flächenorten des ersten stumpfern Octaeders. Die Verbindungen der Orte des Grundoctaeders mit der ersten vierseitigen Säule, d. i. die Diagonalzonen des Grundoctaeders bestimmen auf den Kantenzonen des Grundoctaeders den mittlern der drei angegebenen Vier- und Vierkantner u. s. w. Es scheint überflüssig, mehr zu sagen, da das Verfahren durch die Zeichnung (Fig. 20.) hinlänglich erläutert ist *).

| a : a : ∞ c | a : a : 4c | ¼a : a : c |

| a : ½a : ∞ c |.

Außer dem Grundoctaeder, dem ersten stumpfern und dem vierten schärfern Octaeder, der ersten und zweiten Säule, und der gewöhnlichen vier- und vierkantigen Säule sind drei Vier- und Vierkantner aus der Kantenzone des Grundoctaeders angegeben, von denen der mittlere zugleich in der Diagonalzone der anliegenden Octaederfläche, der obere zugleich in der Kantenzone des ersten stumpfern, und der untere in der Kantenzone des vierten schärfern liegt.

*) Für diejenigen, die sich noch nicht losgesagt haben vom Gebrauch der sphärischen Trigonometrie im Krystallstudium, und für die

§. 29.

Durch diese Construction auf der Kugelfläche haben wir in Bezug auf jede Fläche das erreicht, was uns die Entwerfung des Schemas auf jeder derselben gewähren würde. Wenn irgend ein Flächenort mit den übrigen verbunden wird durch größte Kreise, so haben diese größten Kreise untereinander die Neigungen, die die ebenen Winkel zu 180° ergänzen, die auf der Fläche entstehen (deren Ort mit den übrigen verbunden ist) durch die Kantenrichtungen, in denen die übrigen Flächen diese schneiden. Was in der Projection auf die gerade Endfläche galt, gilt hier für alle Flächen, — da alle Krystallflächen mathematisch in der Kugelfläche enthalten sind, im Differential ihrer Ausdehnung.

Wenden wir unsere Aufmerksamkeit auf den Flächenort a des Grundoctaeders; der Winkel, den die zwei anliegenden Octaederflächen auf der Fläche a bilden, wird symmetrisch getheilt, so daß dessen Hälfte b′ae′ ist — zu dessen Bestimmung wir in dem rechtwinkligen Dreieck ab′e′ die Seiten ab′ und b′e′ kennen. — Die den Winkel theilende Linie ist die Diagonale der

Fälle, wo es nützlich sein kann, sich derselben zu bedienen, ist hier der natürliche Ausgangspunkt gegeben, von wo diese Weise der Betrachtung ausgehen muß. Es ist dies eine geometrische Construction aller ebenen Winkel und aller Kantenwinkel des Krystalls, auf der Kugelfläche; der Bogen zwischen zwei Flächenorten ist die Neigung der Normalen der den Orten entsprechenden Flächen, ergänzt deren Neigung gegen einander zu 180°; die ebenen Winkel auf der Kugelfläche ergänzen die ebenen Winkel auf den Krystallflächen zu 180°. — Ueberhaupt ist das geometrische Studium solcher Constructionen auf der Kugelfläche sehr lehrreich, und viele in der Geometrie der Kugel noch nicht gelöste Probleme dringen sich auf. Nicht ohne geometrisches Interesse sind solche Constructionen auf Ellipsoiden, mit denselben Axen wie das Krystallsystem, dessen Flächenorte construirt werden sollen, — also für ein zwei- und zweigliedriges System ein Ellipsoid mit denselben Verhältnissen in den dreierlei Axen, wie sie das System hat.

Fläche. Verlangen wir den Winkel, den die Durchschnittslinie der Fläche a. mit der Fläche l′ gegen diese Diagonale bildet, so ist zu dessen Bestimmung in dem rechtwinkligen Dreieck b′ax wieder die Seite ab′ und die Seite b′x gegeben. Für dieselbe Forderung in Bezug auf h′ und g′ u. s. w. haben wir die Dreiecke b′ay, b′az u. s. w. — stets Dreiecke, in welchen der rechte Winkel bei b′ und die Seite ab′ constant ist, und in welchen nur die anderen Catheten b′e′, b′x, b′y, b′z für jede besondere Frage variirt.

In einem sphärischen rechtwinkligen Dreieck ist die Tangente des schiefen Winkels gleich der Tangente der gegenüberstehenden Cathete, dividirt durch den Sinus der anliegenden Cathete. In allen Ausdrücken für die ebenen Winkel um a herum ist also der Sinus von ab′ gemeinschaftlich, d. i. der Cosinus für die Neigung der Normale von a gegen die Axe des Systems. Es sei diese Neigung $= \alpha$, so ist nach Fig. 22. (in welcher 0a und 0c die Richtungen s und c des Systems bedeuten, ac die Diagonale der vorliegenden Fläche a, und 0n ihre Normale), $\cos\alpha = \frac{N}{c}$, wenn N die Normale 0n bedeutet. Dieses $\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{N}$ ist also ein beständiger Factor für alle Werthe der um den Flächenort a gebildeten Winkel; der Werth von N für eine Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ ist aber allgemein $\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}\right]}}$. Was den andern, für jeden Fall veränderten Factor in diesen Werthen anbelangt, die Tangente b′e′, b′x, b′z u. s. w., so sind es gerade diese Bogen der dritten veränderlichen Seite in dem rechtwinkligen Dreieck, mit denen identisch sind die Winkel, die die analogen Zonenlinien von ae′, ax, ay, az u. s. w. auf der geraden Endfläche mit der Dia-

gonallinie bilden, dem die Linie ab' entspricht. Der Bogen be' in Fig. 20 = ∠ fal in Fig. 21., der Bogen bx = dem ∠ fal' in Fig. 21., b'y = ∠ fah' u. s. w. — denn beiderlei Größen sind die Neigungen der Normalen der verschiedenen Flächen der horizontalen Zone gegen die Normale der ersten vierseitigen Säule. — Die Tangenten dieser Winkel sind aber immer leicht in dem Schema auf der geraden Endfläche abzulesen, — und das Produkt dieser Tangenten mit $\frac{c}{N}$ giebt uns die verlangten Werthe der Neigungsverhältnisse für die verschiedenen auf der Fläche a entstehenden ebenen Winkel. — In Fig. 25. sind von dem Orte a der Fläche [a : a : c] nach allen übrigen Flächenorten Linien gezogen, (nämlich auf der linken Seite nur) und bezeichnet mit 00, 02, 03 u. s. w. Die Tangente der Neigung von 02 gegen 00 = $\frac{1}{5}$, der Neigung von 03 gegen 00 = $\frac{1}{3}$, von 04 = 1 u. s. w. für die Neigungen von 05, 06, 07, 08, 09; diese Tangenten, die das Schema ablesen läßt, sind die rationalen Verhältnisse der vorliegenden Fläche; ihr irrationales Verhältniß ist $\frac{c}{N}$; setzen wir annäherungsweise $a : c = \sqrt{7} : \sqrt{2}$ *), so ist $\frac{c}{N} = \sqrt{2}\sqrt{[\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2}]} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{7}}$. Demnach haben wir, wenn die Tangente der Neigung der Zonenebene von 02 gegen 00 durch tng (2) der Neigung der Ebene von 03 gegen 01 durch tng (3) u. s. w. bezeichnet wird:

$$\sin (0) : \cos (0) = 0\sqrt{11} : \sqrt{7}$$
$$\sin (2) : \cos (2) = \tfrac{1}{5}\sqrt{11} : \sqrt{7}$$
$$\sin (3) : \cos (3) = \tfrac{1}{3}\sqrt{11} : \sqrt{7}$$

---

*) Dies Verhältniß $a : c = \sqrt{7} : \sqrt{2}$ giebt den Seitenkantenwinkel zu 74° 10½; Herr Prof. Mohs a. a. O. giebt diesen Winkel zu 74° 14' an.

$$\sin(4) : \cos(4) = \sqrt{11} : \sqrt{7}$$
$$\sin(5) : \cos(5) = \sqrt{11} : \tfrac{1}{3}\sqrt{7}$$
$$\sin(6) : \cos(6) = \sqrt{11} : \tfrac{1}{4}\sqrt{7}$$
$$\sin(8) : \cos(8) = \sqrt{11} : \tfrac{1}{5}\sqrt{7}$$
$$\sin(7) : \cos(7) = \sqrt{11} : 0\sqrt{7}.$$

In der Figur 23. sind diese Verhältnisse für die Neigungen der Normalen der Kanten auf |a : a : c|, aufgetragen; die beiden Diagonalen eb und ea verhalten sich wie $\sqrt{11} : \sqrt{7}$. Sollen die Kanten, die auf diesen Normalen senkrecht stehen, aufgetragen werden, s. Fig. 24., so verhält sich hier umgekehrt $ea : eb = \sqrt{11} : \sqrt{7}$. Die correspondirenden Zahlen, 1, 2, 3 u. s. w. mit denen in Fig. 25., werden den Leser sich leicht zurecht finden lassen.

Für die Fläche des vierten schärfern Octaeders |a : a : 4c| sind in Fig. 25. (auf der rechten Seite der Figur.) die Kantennormalen 01, 02, 03 u. s. w. gezogen. Die Verhältnisse für ihre Neigungen gegen 00 giebt die Ansicht des Schema, als irrationales Verhältniß dieser Fläche

$$\frac{c}{N} = 4.\sqrt{2}\sqrt{\left[\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4^2.2}\right]} = \sqrt{\frac{71}{7}}.$$

Bedienen wir uns derselben Abkürzung wie vorher, tng (2) für die tng der Neigung der Zonenebene von 02 gegen 00, tng (3) für die Neigung der Ebene von 03 gegen 00 u. s. w., so giebt die bloße Ansicht des Schema's Fig. 25.:

$$\sin(0) : \cos(0) = 0\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(1) : \cos(1) = \tfrac{1}{11}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(2) : \cos(2) = \tfrac{1}{9}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(3) : \cos(3) = \tfrac{1}{7}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(4) : \cos(4) = \tfrac{1}{5}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(5) : \cos(5) = \tfrac{1}{4}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(6) : \cos(6) = \tfrac{1}{3}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(7) : \cos(7) = \tfrac{3}{7}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin(8) : \cos(8) = \tfrac{1}{2}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$

$$\sin (9) : \cos (9) = \tfrac{3}{5}\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin (10) : \cos (10) = 1\sqrt{71} : \sqrt{7}$$
$$\sin (11) : \cos (11) = \infty\sqrt{71} : \sqrt{7}.$$

§. 30.

Bei den Flächen der Vier- und Vierkantner scheint das Verfahren, nicht völlig so einfach und schnell zum Ziele gelangend, möglich zu sein. Zuerst tritt uns schon die Schwierigkeit entgegen, daß hier keine symmetrische Theilung der Neigungen statt findet, und daß damit zugleich die Bestimmtheit der Richtungen der zwei rechtwinkligen Diagonalen, worauf wir die Verhältnisse bezogen, wegzufallen scheint. Allein von der andern Seite wissen wir, daß je zwei rechtwinklige Richtungen gegen einander immer dasselbe Grundverhältniß haben, s. §. 26., und demnach ist es in Beziehung auf dieses Grundverhältniß gleichgültig, welches Paar von rechtwinkligen Richtuugen wir zu den Diagonalen, Dimensionen der Fläche bestimmen; — nur in Bezug auf die rationalen Verhältnisse wird dies nicht gleichgültig sein, sie haben offenbar ihre Beziehung auf die Hauptrichtungen der Fläche. Die Hauptrichtungen einer Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ im Allgemeinen sind wohl ohne Widerrede die durch diesen ihren Ausdruck angegeben, von $\frac{1}{m}a$ nach $\frac{1}{n}b$, von $\frac{1}{m}a$ nach $\frac{1}{p}c$ von $\frac{1}{n}b$ nach $\frac{1}{p}c$ — so daß im Allgemeinen die Betrachtung der Winkelverhältnisse in Beziehung auf jede dieser Richtungen und die auf ihr senkrecht stehende gleich nahe liegt, — nur in Bezug auf den Zusammenhang dieser Fläche mit den übrigen Gliedern kann es Richtungen in ihr geben, auf welche die Verhältnisse der übrigen Richtungen zu beziehen vorzuziehen ist. Für unsere allgemeine Betrachtung haben wir also drei Paare von Diagonalen, nur für die Flächen

$\frac{1}{m}a : c : \infty b$, $\frac{1}{n}b : c : \infty a$, $\frac{1}{m}a : b : \infty c$ fallen diese drei Paare in Ein Paar zusammen; die Richtnng von $\frac{1}{m}a$ nach c und die auf dieser senkrecht stehende fällt zusammen, sowohl mit der Richtung von $\frac{1}{m}a$ nach ∞b und der auf dieser senkrecht stehenden, als auch mit der von c nach ∞b und der auf dieser senkrecht stehenden Richtung. Dasselbe gilt für $\frac{1}{n}b : c : \infty a$ und für $\frac{1}{m}a : b : \infty c$.

Wir setzen zuerst das Verfahren auseinander, die Winkelverhältnisse in Beziehung auf das Paar Diagonalen zu bestimmen, das durch die Richtung von $\frac{1}{m}a$ nach $\frac{1}{n}b$ und durch die auf dieser senkrechten Richtung bestimmt wird, und richten, zur bessern Verständigung, die Betrachtung gleich zu einer besondern Fläche, und wählen dazu die Fläche des mittlern Vier- und Vierkantners im System des Vesuvian $\frac{1}{3}a : a : c$, der in der Projection auf die Kugelfläche der Ort h entspricht Fig. 20. Da eine Ebene durch c und die Normale dieser Fläche gelegt, senkrecht auf ihrer Richtung von $\frac{1}{3}a$ nach a steht, so ist der Durchschnitt dieser Ebene mit der zu betrachtenden Fläche die Richtung, die von der Richtung $\frac{1}{3}a - a$ gefördert wird, die senkrecht auf ihr steht; ihr entspricht auf der Kugelfläche der größte Kreis chm. Die Verhältnisse für die Neigungen der von h nach den andern Flächenorten gezogenen Kreisen gegen hm sind die gesuchten Neigungsverhältnisse der ebenen Winkel auf $\frac{1}{3}a : a : c$. Ziehen wir z. B. von h nach b′ einen Kreis, so gilt es die Bestimmung des $\angle$ mhb′, von h nach f, so gilt es die Bestimmung des $\angle$ mhq u. s. w. Alle rechtwinkligen

Dreiecke hmb′, hmq u. s. w. haben die eine Cathete hm wieder gemeinschaftlich, die andere Cathete verändert, mb′, mq u. s. w. Wenn die veränderliche Cathete = v, die constante = c, der von der Hypothenuse bei h gebildete Winkel = w, so ist

$$\tang w = \frac{\text{tng } v}{\sin c}.$$

Der Bogen c ist die Ergänzung der Neigung der Normale der vorliegenden Fläche gegen die Axe; der Cosinus dieser Neigung ist $= \frac{N}{c} = \sin c$; N, die Normale der Fläche $\boxed{\frac{1}{3}a : a : c}$

$$\text{ist} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right]}}$$

$$\text{tng } w = \frac{c}{N} \text{ tng } v.$$

Den Werthen der veränderlichen Cathete v, den Winkeln in der horizontalen Zone, entsprechen auch hier wiederum die Neigungen der analogen Zonenlinie gegen die analoge Richtung hm in der Projection auf die gerade Endfläche. Nämlich, wenn wir in dieser Fig. 26. die Linie 00 ziehen, so entspricht diese der hc, und 01 der b′, und 02 der hq u. s. w.; die Winkel der Bogen mb′, mq u. s. w. sind gleich der ∠ 0′01, 0′02 u. s. w.

Also bedarf es zur Bestimmung der Winkelverhältnisse für die Neigungen der Kantennormalen gegen die Diagonale der Fläche $\boxed{\frac{1}{3}a : a : c}$ nur der Verhältnisse für die Neigungen, welche die diesen entsprechenden Zonenlinien in der Projection auf der geraden Endfläche mit der der Diagonale entsprechenden Richtung 00 bilden, und diese Verhältnisse mit dem gemeinschaftlichen Verhältniß $\frac{c}{N}$ zu vervielfachen.

§. 31.

Wird unsre Fläche in Beziehung auf die zwei anliegenden

Vier- und Vierkantnerflächen betrachtet, wird gefragt nach dem Verhältniß der zweierlei Endkanten gegen die Grundkante, so ist diese Frage also zurückgeführt auf die Frage: welches ist Fig. 26. das Verhältniß der $\angle$ 300 und 400; und welches ist der Werth von $\frac{c}{N}$ für die Fläche $\boxed{\frac{1}{3}a : a : c}$? $\frac{c}{N} = \sqrt{2}\sqrt{[\frac{9}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}]}$ $= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. Tang 300 $= 2$, tng 400 $= 3$. Also

$$\sin (3) : \cos (3) = 2\sqrt{27} : \sqrt{7}$$
$$\sin (4) : \cos (4) = -3\sqrt{27} : \sqrt{7}.$$

Wird gefragt nach der Richtung, die unsere Fläche mit zwei Flächen des Grundoctaeders gemein hat, d. i. nach der Richtung, deren Normale 05 ist, so ist für sie:

$$\sin (5) : \cos (5) = \text{tng } (005)\sqrt{27} : \sqrt{7}$$
$$\text{tng } 005 = \text{tng } (003 - 503) = \frac{2-1}{1+2} = \tfrac{1}{3}; \text{ also}$$
$$\sin (5) : \cos (5) = \tfrac{1}{3}\sqrt{27} : \sqrt{7}.$$

Eben so ist für die mit der anliegenden Octaederfläche gemeinschaftliche Richtung:

$$\sin (6) : \cos (6) = \tfrac{1}{2}\sqrt{27} : \sqrt{7}.$$

Für die Kanten, die nicht zwei anliegende, sondern zwei abwechselnde Flächen des Vier- und Vierkantners auf ihr bilden, deren Normalen durch 7 und 8 bezeichnet sind, ist:

$$\sin (7) : \cos (7) = \text{tng } 007\sqrt{27} : \sqrt{7}$$
$$= \sqrt{27} : \sqrt{7}$$
$$\sin (8) : \cos (8) = \sqrt{27} : \sqrt{7} \text{ u. s. w.}$$

In der Fig. 27. a. sind diese Verhältnisse aufgezeichnet, und die den Kantennormalen entsprechenden Seiten der Vier- und Vierkantnerflächen mit denselben Zahlen bezeichnet.

§. 32.

Um das gegebene Verfahren zu verallgemeinern, ziehen wir ein zwei und zweigliedriges System in Betracht, wo die Gleichheit der zwei Dimensionen a und b nicht mehr statt findet. Es fol-

sollen Fig. 27. b. die Winkelverhältnisse der Fläche $\boxed{a:b:c}$ im System des Topas bestimmt werden. Für die Neigungen von 3, 4, 5 u. s. w. sind jetzt nicht mehr die Verhältnisse so unmittelbar abzulese; ihre Bestimmung wird aber nicht weniger einfach, wenn wir diese Neigungen als die Differenz oder Summe der Neigung von 01, (der Zonenlinie, die die Diagonalzone der Zuschärfung, in der die vorliegende Fläche liegt, bezeichnet) gegen 00, und der Neigung der jedesmal betrachteten Zonenlinie gegen 01 nehmen, da für diese zwei Neigungen einmal die Verhältnisse unmittelbar auf dem Schema zu ersehen sind, und dann, weil die eine dieser Neigungen, nämlich 01 gegen 00 als constant in die Rechnung eingeht. — Im vorliegenden Fall ist tng 001 $= \frac{b}{a}$, und z. B. tng 301 $= \frac{2}{3}\frac{b}{a}$, also

tng 003 $= \frac{ab}{3a^2 + 2b^2}$. Allgemein sei für die Neiguung der Diagonalzonenlinie gegen 00 tng $= m\frac{b}{a}$, und für die Neigung der zu betrachtenden Zonenlinie gegen diese Diagonalzonenlinie tng $= n\frac{b}{a}$, so ist das gesuchte Verhältniß für die Neigung der Zonenlinie gegen 00

$$\text{tng} = \frac{(m - n)ab}{a^2 + mnb^2}.$$

Für die Neigung der Kantennormale gegen die Diagonale auf der zu betrachtenden Fläche ist demnach der vollständige, allgemeine Ausdruck des Verhältnisses:

$$\text{tng} = \frac{m - n}{a^2 + mnb^2} \frac{abc}{N},$$

in welchem der irrationale Theil gänzlich gesondert ist vom rationalen Theile. Das gemeinschaftliche, irrationale Verhältniß ist also das Verhältniß der Normale, der Flächenrichtung zum Product der drei rechtwink-

ligen Dimensionen. Für eine Fläche $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$

ist also das irrationale Grundverhältniß

$$\frac{abc}{N} = abc\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right]}.$$

Die Werthe für die einzelnen Neigungsverhältnisse übersieht man im Folgenden:

$m = 1$	n	$\frac{1-n}{5+18n}$	
(1)	0	$\frac{1}{5}$	$\sin(1) : \cos(1) = \sqrt{39} : 5$
(2)	∞	$-\frac{1}{18}$	$\sin(2) : \cos(2) = -\sqrt{39} : 18$
(3)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{31}$	$\sin(3) : \cos(3) = \sqrt{39} : 51$
(4)	2	$-\frac{1}{41}$	$\sin(4) : \cos(4) = -\sqrt{39} : 41$
(5)	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{87}$	$\sin(5) : \cos(5) = -\sqrt{39} : 87$
(6)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{28}$	$\sin(6) : \cos(6) = \sqrt{39} : 28$
(7)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{33}$	$\sin(7) : \cos(7) = 2\sqrt{39} : 33$
(8)	4	$-\frac{3}{77}$	$\sin(8) : \cos(8) = -3\sqrt{39} : 77$

u. s. w.

§. 33.

Wir wenden uns jetzt dahin, das Verfahren zu zeigen, wenn die Verhältnisse der Fläche $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$ sollen auf die Richtung $\frac{1}{m}a : \frac{1}{p}c$ und auf die, die auf derselben senkrecht steht, bezogen werden. Die diesen zwei Richtungen entsprechenden Ebenen für die Fläche 0 in Fig. 28. sind die größten Kreise b00 und ac, und die Aufgabe reducirt sich auf die Bestimmung der Neigungen von den Zonenebenen 01, 02, 03 u. s. w. gegen 00, d. i. auf die Bestimmung der Winkel 001, 002, 003 u. s. w. Sie werden durch die Dreiecke 001, 002 u. s. w. bestimmt, und in allen diesen Dreiecken ist wiederum die Seite 00 gemeinschaftlich, d. i. das Complement der Nei-

gung der Flächennormale gegen die Axe b. Der Cosinus dieser Neigung $= \frac{N}{b} = \sin 00$, und demnach ist:

$$\text{tng}\,(1) = \frac{\text{tng}\,01}{\sin 00}$$

$$\text{tng}\,(1) = \frac{b}{N}\,\text{tng}\,01$$

$$\text{tng}\,(2) = \frac{b}{N}\,\text{tng}\,02 \quad \text{u. s. w.}$$

Die Neigungsverhältnisse für 01, 02, 03 u. s. w. sind aber wiederum leicht auf dem Schema der geraden Endfläche zu finden. — Nehmen wir die vorher untersuchte Fläche $|a : b : c|$ des Topassystems wieder auf, so ist in Fig. 27. b. die Linie 01 die, welche in Fig. 28. der 00 entspricht, und die Bogen 01, 02 u. s. w. daselbst sind die Neigungen der von den verschiedenen Zonenlinien in der Verticalzone ac bestimmten Normalen gegen die Normale a, aus deren Diagonalzone die vorliegende Fläche ist. Die Neigungen der verschiedenen Normalen in dieser Verticalzone gegen die Axe giebt das Schema unmittelbar, und die verlangte Neigung ist immer die Differenz zweier solcher Neigungen. Setzen wir, für die Neigung der Normale a gegen die Axe z. B. $\text{tng} = m\frac{c}{a}$, für die Neigung der Normale 3, $\text{tng} = n\frac{c}{a}$, so ist $\text{tng}\,a3 = \frac{(m-n)\,ac}{a^2 + mnc^2}$, und für die Neigung der Kantennormale (3) auf der vorliegenden Fläche

$$\text{tng}\,(3) = \frac{m-n}{a^2 + mnc^2}\,\frac{abc}{N}.$$

Für unsre Fläche $|a : b : c|$ ist $m = 1$, und für sie wird der Ausdruck

$$\frac{1-n}{5 + n.16}\,\sqrt{39}.$$

Die leichte Ausführung der Rechnung wird man im Folgenden übersehen:

$m=1$	n	$\frac{1-n}{5+16n}$	
0	0	$\frac{1}{5}$	$\sin(0) : \cos(0) = \sqrt{39} : 5$
1	1	0	$\sin(1) : \cos(1) = \sqrt{39} : \infty$
2	∞	$-\frac{1}{16}$	$\sin(2) : \cos(2) = -\sqrt{39} : 16$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{31}$	$\sin(3) : \cos(3) = 2\sqrt{39} : 31$
4	-1	$-\frac{2}{11}$	$\sin(4) : \cos(4) = -2\sqrt{39} : 11$
5	$-\frac{1}{3}$	-4	$\sin(5) : \cos(5) = -4\sqrt{39} : 1$
6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{26}$	$\sin(6) : \cos(6) = \sqrt{39} : 26$
7	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{47}$	$\sin(7) : \cos(7) = \sqrt{39} : 47$
8	-3	$-\frac{4}{43}$	$\sin(8) : \cos(8) = -4\sqrt{39} : 43$

u. s. w.

Es wird nicht nöthig sein, das Verfahren in Beziehung auf das dritte Paar von Diagonalen aus einander zu setzen; wir übersehen leicht, daß der allgemeine Ausdruck in Bezug auf dieses Paar sein wird

$$\frac{m-n}{b^2+mnc^2} \cdot \frac{abc}{N},$$

wenn m hier wie vorher die rationale Vervielfachung des Grundverhältnisses in der Vertikalzone b — c für die Neigung der Normale, aus deren Diagonalzone die zu untersuchende Fläche ist, und n dasselbe für die von der jedesmaligen Zonenlinie bestimmte Normale in der Vertikalzone ist.

§. 34.

Wir haben nun noch das Verfahren in der Anwendung auf die drei- und sechsgliedrigen Systeme zu erläutern. Auch hier haben wir im Allgemeinen für jede Fläche $\left[\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}c\right]$ drei Hauptrichtungen, nämlich die in ihrem Ausdruck bezeichneten, und also mit Inbegriff der drei auf diesen senkrecht stehenden Richtungen drei Paare von Diagonalen; — nur bei den

Flächen $\overline{\left|\frac{1}{m}a ; \frac{1}{m}a\right|}$ (p, c), wo zwei dieser Richtungen gleich sind, unterscheidet sich die dritte als eine mittlere, symmetrische, als die Diagonalrichtung im engern Sinne. Für solche ist nun auch hier das Verfahren am einfachsten, wo die Neigungsverhältnisse auf diese symmetrische Richtung bezogen werden. Fig. 29. ist die Construction der Flächenorte eines rhomboedrischen Systems auf der Kugelfläche. Aus dem Zusammenhange wird man leicht erkennen, daß, wenn die drei hervorgehobenen Orte den Flächen des Grundrhomboeders entsprechen, das erste und zweite schärfere Rhomboeder, und das erste stumpfere Rhomboeder angegeben sind, so wie der metastatische Drei- und Dreikantner des Grundrhomboeders, und die erste und zweite sechsseitige Säule. Die Neigungen der Kantennormalen in der Fläche des Grundrhomboeders gegen die Diagonale sind die Winkel $00'1$, $00'2$, $00'3 \ldots 0'0m$. Es ist $\text{tng}.00'm = \frac{\text{tng}\,0m}{\sin 0'0}$, $\sin 0'0 = \cos 0'0''$ d. h. der Cosinus der Neigung der Normale der Fläche gegen s, also $\sin 0'0 = \frac{N}{s}$, und also $\text{tng}\ 00'm = \frac{s}{N}\text{tng}\,0m$. Die $\text{tng}\ 0m$ ist auf dem Schema des Systems auf der geraden Endfläche unmittelbar auf der Richtung, die auf der Richtung s, in welcher der Flächenort des betrachteten Rhomboeders liegt, senkrecht steht zu lesen. Alle Tangenten von 01, 02, 03 u. s. w. sind Vielfache von $\text{tng}\ 01 = \frac{c\sqrt{3}}{3.s}$, also $\text{tng}\ 0'0m = \frac{m}{3}\frac{c\sqrt{3}}{N.}$, so daß $\frac{c\sqrt{3}}{N}$ das Grundverhältniß der Rhomboederfläche ist, und $\frac{m}{3}$ die jedesmalige Vervielfachung desselben.

In Fig. 15., in dem Schema des Systems des Rothgiltigerzes, wird man sich analoge Linien mit denen $0'1$, $0'2$, $0'3$, 04 in Fig. 29. gezogen denken (es ist nicht geschehen, um die

Figur nicht zu überfüllen), und in Bezug auf sie folgende Rechnung leicht übersehen; da $s : c = \sqrt{5} : \sqrt{4}$, so ist

$$\frac{c\sqrt{3}}{N} = \sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{[\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}]} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$\text{tng } 00'm = \frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{5}.}$$

Für tng 0'01, d. i. für die Neigung der Rhomboederkanten auf der Rhomboederfläche gegen die Diagonale derselben ist $m = 1$, also $\sin(1) : \cos(1) = \sqrt{3} : \sqrt{5}$, d. i. das Verhältniß der beiden Diagonalen der Rhomboederflächen. — Für die Kante, die von der gegenüber liegenden Fläche des zweiten schärfern Rhomboeders gebildet wird d. i. für 00'2

$$\sin(2) : \cos(2) = 2\sqrt{3} : \sqrt{5}.$$

Für 00'3 $\quad \sin(3) : \cos(3) = 3\sqrt{3} : \sqrt{5}$

„ 00'4 $\quad \sin(4) : \cos(4) = \infty\sqrt{3} : \sqrt{5}.$

Man überzeugt sich, daß es, um kürzer zum Ziele zu gelangen, keinen andern Weg geben kann. — Für jede andere Rhomboederfläche $\boxed{\overset{c}{\frac{2}{m}s : \frac{1}{m}s : \frac{2}{m}s}}$ ist der allgemeine Ausdruck ihrer Winkelverhältnisse gleichfalls:

$$\frac{m}{3}\,\frac{c\sqrt{3}}{N.}$$

So ist für das erste schärfere $\boxed{\overset{c}{1s : \tfrac{1}{2}s : s}}$

$$\frac{m}{3}\,\frac{c\sqrt{3}}{N} = \frac{m}{3}\sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{[\tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{4}]} = m\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \text{ und}$$

$m = 1$ für die Kanten dieses Rhomboeders

$$\sin : \cos = \sqrt{7} : \sqrt{5}.$$

Für das zweite schärfere $\boxed{\overset{c}{\tfrac{1}{2}s : \tfrac{1}{4}s : \tfrac{1}{2}s}}$

$$\frac{m}{3}\,\frac{c\sqrt{3}}{N} = \frac{m}{3}\sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{[\tfrac{16}{5} + \tfrac{1}{4}]} = m\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}.$$

Für $\boxed{\overset{c}{4s : 2s : 4s}}$, $\frac{m}{3}\,\frac{c\sqrt{3}}{N} = m\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}.}$

Was hier von den Rhomboederflächen nachgewiesen ist, gilt auch von den Dihexaederflächen, so daß für $\left[\overbrace{\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a}^{c}\right]$ der allgemeine Ausdruck der Neigungsverhältnisse ist: $\frac{m}{3} \frac{c\sqrt{3}}{N}$; allgemein ist hier für die Dihexaederkanten $m = 3$, wie für die Rhomborderkanten $m = 1$ war.

§. 35.

Es bleibt uns noch übrig, den Ausdruck für die Neigungsverhältnisse einer Fläche $\left[\overbrace{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}^{c}\right]$ zu entwickeln. Soll dies in Bezug auf die Richtung $\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s$, und die auf dieser senkrechten geschehen, so ziehen wir Fig. 29., wenn $(0')$ dort den dieser Fläche entsprechenden Flächenort vorstellt, den größten Kreis $0(0')$, und suchen die Verhältnisse für die ebenen Winkel, welche von den verschiedenen Verbindungskreisen des Flächenorts $(0')$ mit den andern Flächenorten, mit $(0')0$ gebildet werden. Wir werden hier wiederum rechtwinklige Dreiecke haben, die alle eine Seite $(0')(0'')$ gemeinschaftlich haben, deren andere Seiten in dem Kreise $(0'')0''$ liegen, und die also gemessen werden auf dem Schema auf der geraden Endfläche durch die ebenen Winkel, die von Zonenlinien dort gebildet werden, die den Zonenkreisen hier entsprechen, welche die dritte Seite auf dem Kreise $(0'')0''$ abschneiden, was nach dem in den vorigen Paragraphen Gesagten keiner Erläuterung weiter bedarf. Das Grundverhältniß der Bogen auf $(0'')0''$ ist $\sqrt{3}$, also die Tangente der dritten Seite immer $n'\sqrt{3}$; der Sinus von $(0')(0'')$ ist wieder gleich dem Cosinus der Neigung der Normale gegen die Axe, $\sin(0')(0'') = \frac{N}{c}$, und daher der

allgemeine Ausdruck der Winkelverhältnisse für die Fläche $\overline{\left|\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s\right|}^{c}$: $\frac{n'c\sqrt{3}}{N}$ — so daß $\frac{c\sqrt{3}}{N}$ der allgemeine Ausdruck des irrationalen Grundverhältnisses für jede Fläche eines drei- oder sechsgliedrigen Systems ist.

Es sei Fig. 30. im Schema des Rothgiltigerzes $\overline{\left|\frac{1}{4}s : \frac{1}{5}s\right|}^{\frac{1}{2}c}$ 0', in dieser Hinsicht zu untersuchen. Um die Verhältnisse für die Winkel zu finden, die die Zonenlinien 1, 2, 3 u. s. w. mit 00' bilden, ziehen wir auf 00'' die Senkrechte 0'0'', so ist z. B. für 2 der gesuchte Winkel 00'0'' — 20'0'', für 3 derselbe 00'0'' — 30'0'' u. s. w. tng 00'0'' $= \frac{5}{3}\sqrt{3}$, und tng m0'0'' sei gleich $m\sqrt{3}$, so ist der gesuchte Winkel $\frac{\frac{5}{3} - m}{1 + 5m}\sqrt{3} = \frac{5 - 3m}{3(1 + 5m)}\sqrt{3}$. Also ist der Ausdruck der Winkelverhältnisse für diese Fläche $\frac{c\sqrt{3}}{N}\frac{5 - 3m}{3(1 + 5m)}$. Für 1 ist $m = 0$, für 2 ist $m = \frac{1}{2}$, für 3 ist $m = 1$ u. s. w. — so daß

für 1, $\frac{c\sqrt{3}}{N}\frac{5 - 3m}{3(1 + 5m)} = \frac{c\sqrt{3}}{N}\frac{5}{3}$.

" 2, " " " " $\frac{c\sqrt{3}}{N}\frac{1}{3}$

" 3, " " " " $\frac{c\sqrt{3}}{N}\frac{1}{9}$. u. s. w.

Die Normale einer jeden Fläche $\overline{\left|\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s\right|}^{c}$, die vom Mittelpunkte auf sie gezogene Senkrechte, ist

$$= \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{c^2} + 4\frac{(m^2 + n^2 - mn)}{3s^2}\right]}}.$$

Also in unserm Fall, wo $s : c = \sqrt{3} : \sqrt{4}$, und die Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}} = \overset{c}{\boxed{\frac{1}{2}s : \frac{2}{3}s}}$, ist

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{4} + 4\frac{4 + \frac{25}{4} - 5)}{15.}\right]}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{33}{4.5}}}, \text{ und}$$

$$\frac{c\sqrt{3}}{N} = \frac{3\sqrt{11}}{\sqrt{5}}.$$

Daher

$$\sin(1) : \cos(1) = 5\sqrt{11} : \sqrt{5}$$
$$\sin(2) : \cos(2) = \sqrt{11} : \sqrt{5}$$
$$\sin(3) : \cos(3) = \tfrac{1}{3}\sqrt{11} : \sqrt{5}$$
$$\sin(4) : \cos(5) = -\sqrt{11} : \sqrt{5}$$
$$\sin(5) : \cos(5) = -2\sqrt{11} : \sqrt{5} \text{ u. s. w.}$$

Daß für sechsgliedrige Systeme dasselbe gilt, bedarf keiner Nachweisung, im Ausdruck werden wir nur s mit a vertauschen. — Im Quarzsystem, siehe Fig. 6., ist für $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a}}$, wenn $a : c = \sqrt{5} : \sqrt{6}$,

$$N = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{6} + 4\left(\frac{25 + 16 - 20}{3.5}\right)\right]}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{173}{5.6.}}};$$

$\frac{c\sqrt{3}}{N} = \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{173}}{\sqrt{5.}}$, und daher der allgemeine Ausdruck der Winkelverhältnisse für diese Fläche $\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{173}}{\sqrt{5}}\,\frac{5 - 3m}{1 + 5m}$.

§. 36.

Ueber die Entwickelung der Winkelverhältnisse der Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}}$ in Beziehung auf die Richtung $c : \frac{1}{n}s$ und die auf ihr senkrecht stehende, werden wir uns leicht verständigen.

Das gemeinschaftliche irrationale Grundverhältniß ist der Cosinus der Neigung der Normale dieser Fläche gegen die auf $\frac{1}{n}s$ senkrecht stehende Richtung a, (welcher Cosinus $= \frac{s\sqrt{3}}{(2m-n)N}$ ist), multiplicirt mit dem irrationalen Grundverhältniß für die Neigungen in der vertikalen Zone, in deren Ebene $\frac{1}{n}s$ liegt, (welches irrationale Grundverhältniß $= \frac{c}{s}$ ist), welches Produkt $= \frac{s\sqrt{3}}{(2m-n)N}\frac{c}{s}$ ist, das irrationale Grundverhältniß also $\frac{c\sqrt{3}}{N}$. Die rationale Veränderung des Grundverhältnisses ist die rationale Vervielfachung des Verhältnisses $\frac{s}{c}$ für die Neigungen der verschiedenen Normalen, die in der vertikalen Zone von den in Betracht gezogenen Zonenlinien bestimmt werden, gegen die Normale der Fläche $\left|\frac{2}{n}s : \frac{1}{n}s : \frac{2}{n}s\right|^{c}$, aus deren Diagonalzone die Fläche $\left|\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s\right|^{c}$ ist. Diese Neigungen sind die Differenzen der Neigungen dieser Normale und der jedesmal zu berücksichtigenden Normale gegen die Axe. Die Tangente der Neigung der Normale von $\left|\frac{2}{n}s : \frac{1}{n}s : \frac{2}{n}s\right|^{c}$ gegen die Axe ist $n\frac{c}{s}$, und die Neigung der Normale, die von der jedesmaligen Zonenlinie bestimmt wird, sei $\nu\frac{c}{s}$, so ist die Tangente für die Differenz beider Winkel, für die Neigung beider Normalen gegen einander

$= \frac{(n-\nu)\frac{c}{s}}{1+m\nu\frac{c^2}{s^2}}$, so daß $\frac{s^2(n-\nu)}{s^2+n\nu c^2}$ die rationale Vervielfa-

von $\frac{c}{s}$ ist, und der allgemeine Ausdruck der Winkelverhältnisse

der Fläche $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}}$, in Beziehung auf die Richtung $c : \frac{1}{n}s$ ist:

$$\frac{c\sqrt{3}}{N}\,\frac{s^2(n-\nu)}{(2m-n)(s^2+n\nu c^2)}.$$

Für die vorher betrachtete Fläche des metastatischen Drei- und Dreikantners des Grundrhomboeders im System des Rothgiltig-Erzes ist, s. Fig. 30.

$$\frac{c\sqrt{3}}{N}\,\frac{s^2(n-\nu)}{(2m-n)(s^2+n\nu c^2)} = \frac{3\sqrt{11}}{\sqrt{5}}\,\frac{2.5(\frac{5}{2}-\nu)}{3(5+5.2\nu)}$$

$$= \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}\,\frac{5-2\nu}{(1+2\nu)}$$

$\nu = \frac{5}{2}$, sin (1) : cos (1) $= 0\sqrt{11} : \sqrt{5}$

$\nu = \frac{7}{4}$, sin (2) : cos (2) $= \frac{1}{3}\sqrt{11} : \sqrt{5}$

$\nu = 1$, sin (3) : cos (3) $= 1\sqrt{11} : \sqrt{5}$

$\nu = 0$, sin (0) : cos (0) $= \sqrt{11} : \frac{1}{5}\sqrt{5}$

$\nu = 7$, sin (4) : cos (4) $= -\frac{1}{5}\sqrt{11} : \frac{1}{3}\sqrt{5}$

$\nu = 4$, sin (5) : cos (5) $= -\frac{1}{3}\sqrt{11} : \sqrt{5}$ u. s. w.

Derselbe Gang der Entwickelung auf die Richtung $\frac{1}{m}s : c$

in der Fläche $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{m}s : \frac{1}{n}s}}$ angewandt, giebt in Beziehung auf

diese Richtung den allgemeinen Ausdruck der Winkelverhältnisse

$$\frac{c\sqrt{3}}{N}\,\frac{s^2(m-\mu)}{(2n-m)(s^2+m\mu c^2)}$$

und für die Fläche $\boxed{\overset{c}{\frac{1}{2}s : \frac{2}{5}s}}$: $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}\,\frac{5(2-\mu)}{5+8\mu}$, daher für

$1,\ \mu = 5,\ \sin(1) : \cos(1) = -\frac{1}{3}\sqrt{11} : \sqrt{5}$
$2,\ \mu = -7,\ \sin(2) : \cos(2) = -\frac{1}{17}\sqrt{11} : \frac{1}{15}\sqrt{5}$
$3,\ \mu = -1,\ \sin(3) : \cos(3) = -\sqrt{11} : \frac{1}{5}\sqrt{5}$
$0,\ \mu = 0,\ \sin(0) : \cos(0) = \sqrt{11} : \frac{1}{2}\sqrt{5}$
$4,\ \mu = \frac{7}{3},\ \sin(4) : \cos(4) = \frac{1}{27}\sqrt{11} : \frac{1}{5}\sqrt{5}$

u. s. w.

§. 37.

So ist die Einfachheit der Methode für die Hauptfragen der krystallographischen Betrachtnng, glaube ich, vollkommen gewonnen. Besonders wichtig, und für weitere Untersuchungen fruchtbar ist die Unterscheidung der irrationalen Grundverhältnisse von ihren rationalen Vervielfachungen; jene sind das einem bestimmten Krystallsysteme Eigenthümlichste, Individuellste, diese sind abhängig von dem allgemeinen Entwickelungsgange der Glieder eines Systems. In Hinsicht der irrationalen Grundverhältnisse, sowohl der Zonen als der Flächen, können wir nun das Gesetz derselben allgemein aussprechen: das irrationale Grundverhältniß irgend zweier auf einander senkrecht stehender Richtungen ist in derselben Ebene, diese sei eine Zonenebene, oder eine Krystallfläche, immer dasselbe, und dieses Verhältniß ist immer das irrationale Verhältniß des Produkts der drei auf einander senkrecht-stehenden Dimensionen des Systems zu der auf der Ebene senkrecht stehenden Richtung. Alle Grundverhältnisse eines Krystallsystems sind Grundverhältnisse der Richtungen zu den drei auf einander senkrecht stehenden Dimensionen.

Die Richtung der Normale einer Fläche nennen wir die Flächenrichtung, und dann sind alle irrationale Grundverhältnisse die Grundverhältnisse der Kantenrichtungen oder der Flächenrichtungen zu den drei Dimensionen.

Da wir uns hier nicht auf eine weitere Untersuchung dieser irrationalen Grundverhältnisse einlassen können, so wollen

wir dieselben doch für die Flächen einiger Systeme angeben. Die Grundverhältnisse des regulären Systems sind auf das Bestimmteste individualisirt, sie haben das Interesse der Mathematiker schon lange erregt. Es sind nämlich die Zahlen, die die Summe dreier Quadrate sind; (indem das Grundverhältniß jeder Fläche $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right| = abc\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right]}$ hier wird $\sqrt{[m^2 + n^2 + p^2]}$); die ausgezeichnetsten Mathematiker haben ihre Eigenschaften in Untersuchung gezogen, hier bekommen sie eine naturhistorische Stellung und Bedeutung. Für die beobachteten Flächen sind diese Grundverhältnisse:

Für	$\lvert a : \infty a : \infty a \rvert$	ist d. Grundverh.	$\sqrt{1} = \sqrt{1^2}$
„	$\lvert a : a : \infty a \rvert$	„ „ „	$\sqrt{2} = \sqrt{[1^2 + 1^2]}$
„	$\lvert a : a : a \rvert$	„ „ „	$\sqrt{3} = \sqrt{[1^2 + 1^2 + 1^2]}$
„	$\lvert a : \frac{1}{2}a : \infty a \rvert$	„ „ „	$\sqrt{5} = \sqrt{[2^2 + 1^2]}$
„	$\lvert a : a : \frac{1}{2}a \rvert$	„ „ „	$\sqrt{6} = \sqrt{[2^2 + 1^2 + 1^2]}$
„	$\lvert \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : a \rvert$	„ „ „	$\sqrt{9} = \sqrt{[2^2 + 2^2 + 1^2]}$
„	$\lvert \frac{1}{3}a : a : \infty a \rvert$	„ „ „	$\sqrt{10} = \sqrt{[3^2 + 1^2]}$
„	$\lvert \frac{1}{3}a : a : a \rvert$	„ „ „	$\sqrt{11} = \sqrt{[3^2 + 1^2 + 1^2]}$
„	$\lvert \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a : a \rvert$	„ „ „	$\sqrt{14} = \sqrt{[3^2 + 2^2 + 1^2]}$
„	$\lvert \frac{1}{4}a : \frac{1}{2}a : a \rvert$	„ „ „	$\sqrt{21} = \sqrt{[4^2 + 2^2 + 1^2]}$
„	$\lvert \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a \rvert$	„ „ „	$\sqrt{22} = \sqrt{[3^2 + 3^2 + 2^2]}$
„	$\lvert \frac{1}{5}a : \frac{1}{3}a : a \rvert$	„ „ „	$\sqrt{35} = \sqrt{[5^2 + 3^2 + 1^2]}$

Das Urtheil über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit von Winkelverhältnissen ist hier sehr einfach; unmöglich z. B. sind hier im regulären System alle Neigungen, deren Verhältnisse Vielfache von $\sqrt{7}$ sind, da 7 nicht die Summe dreier Quadrate ist.

Für das System des Quarzes ist die Form der Flächen-Grundverhältnisse:

$$\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[5+8(m^2+n^2-mn)]}.$$

Daher für $\left[\begin{smallmatrix} c \\ a : a \end{smallmatrix}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[3^2+2^2]}$ d. Grundverhältniß

$\left[\begin{smallmatrix} c \\ \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a \end{smallmatrix}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[6^2+1]}$

$\left[\begin{smallmatrix} c \\ \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a \end{smallmatrix}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[8^2+3^2+2^2]}$

$\left[\begin{smallmatrix} c \\ \frac{1}{4}a : \frac{1}{4}a \end{smallmatrix}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[9^2+6^2+4^2]}$

$\left[\begin{smallmatrix} c \\ a : \frac{1}{2}a \end{smallmatrix}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[5^2+2^2]}$

$\left[\begin{smallmatrix} c \\ \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a \end{smallmatrix}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[6^2+5^2]}$

$\left[\begin{smallmatrix} c \\ \frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a \end{smallmatrix}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[10^2+3^2]}$

$\left[\begin{smallmatrix} c \\ \frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a \end{smallmatrix}\right]$ $\sqrt{\tfrac{3}{5}}\sqrt{[12^2+5^2+2^2]}$

Vierter Abschnitt.

Die Projection der Flächenorte auf jeder krystallonomischen Fläche zu entwerfen.

§. 38.

Das im ersten Abschnit aus einander gesetzte Verfahren lehrte, wie auf der geraden Endfläche eines Systems die Projection der Flächenorte zu entwerfen sei; — wir werden im Besitz der Methode, auf jeder krystallonomischen Fläche diese Projection zu entwerfen, sein, wenn wir uns darüber verständigt haben, wie sie von der Seite der rein mathematischen Betrachtung immer als gerade Endfläche angesehen werden kann. Wir können nämlich die Richtungen des Systems, in denen wir die Thätigkeiten uns wirkend denken, deren Verhältniß der Ausdruck der Fläche

ist, immer in solche drei rechtwinklige Richtungen zerlegen, daß die Fläche, auf welcher die Projection zu entwerfen ist, in Bezug auf diese die gerade Endfläche ist. Die Richtungen der Diagonalen der Fläche, und die Richtung ihrer Normale sind die drei rechtwinkligen Richtungen, auf welche die Ausdrücke aller Flächen des Systems zu reduciren sind, damit das oben gegebene Verfahren auch hier seine Anwendung erleidet. Die Lage der Flächen in diesen drei Richtungen auszudrücken, ist ein Problem der Mechanik, nämlich das der Zerlegung der Kräfte. — In dem Ausdruck der Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ ist nämlich zugleich das Verhältniß der Thätigkeiten in den drei rechtwinkligen Dimensionen gegeben, die die Flächenrichtung bestimmen $\left[\frac{m}{a} : \frac{n}{b} : \frac{p}{c}\right]$; sind nun drei andre rechtwinklige Richtungen im Systeme gegeben, die auf dieselbe Weise diese Flächenrichtung durch das Maaß der in ihnen thätig zu denkenden Kräfte bestimmen sollen, so ist ja offenbar, daß die Thätigkeiten $\frac{m}{a} : \frac{n}{b} : \frac{p}{c}$ in diese neuen Richtungen müssen zerlegt werden.

Die Mechanik lehrt, daß, wenn dies Maaß der Kraft einer Richtung a in drei senkrechte Richtungen soll zerlegt werden, und die Richtung a mit diesen die Winkel x, y, z bildet, das Maaß der Kräfte in den drei Richtungen ist $a \cos x$, $a \cos y$, $a \cos z$. Nennen wir die drei andern auf einander senkrecht stehenden Richtungen in einem Systeme α, β, γ, und die Winkel, die a mit α, β, γ bildet, x, y, z, die Winkel, die b mit ihnen bildet x', y', z', und die c mit ihnen bildet x'', y'', z'', so ist das Maaß der Kräfte in α, β und γ, deren Resultante $\frac{m}{a}$ ist,

$$\begin{array}{ccc} \text{in } \alpha, & \text{in } \beta, & \text{in } \gamma, \\ \frac{m}{a}\cos x & \frac{m}{a}\cos y & \frac{m}{a}\cos z. \end{array}$$

Das Maaß derselben für $\frac{n}{b}$ ist:

$$\text{in } \alpha, \quad \text{in } \beta, \quad \text{in } \gamma$$

$$\frac{n}{b}\cos x' \quad \frac{n}{b}\cos y' \quad \frac{n}{b}\cos z'$$

und für $\frac{p}{c}$ ist das Maaß dieser Kräfte

$$\frac{p}{c}\cos x'' \quad \frac{p}{c}\cos y'' \quad \frac{p}{c}\cos z'',$$

so daß die Summe der Kräfte 1) in der Richtung α ist:

$$\frac{m}{a}\cos x + \frac{n}{b}\cos x' + \frac{p}{c}\cos x'',$$

2) in der Richtung β:

$$\frac{m}{a}\cos y + \frac{n}{b}\cos y' + \frac{p}{c}\cos y'',$$

3) in der Richtung γ:

$$\frac{m}{a}\cos z + \frac{n}{b}\cos z' + \frac{p}{c}\cos z''.$$

Das Verhältniß dieser drei Summen ist das, welches dieselbe Richtung im Krystall bestimmt, welche in den Richtungen a, b, c, durch $\left[\frac{m}{a} : \frac{n}{b} : \frac{p}{c}\right]$ bestimmt ist; daher ist der Ausdruck der Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ in Bezug auf die Richtungen α, β, γ:

$$\frac{1}{\frac{m}{a}\cos x + \frac{n}{b}\cos x' + \frac{p}{c}\cos x''} : \frac{1}{\frac{m}{a}\cos y + \frac{n}{b}\cos y' + \frac{p}{c}\cos y''} : \frac{1}{\frac{m}{a}\cos z + \frac{n}{b}\cos z' + \frac{p}{c}\cos z''}.$$

§. 39.

Dieses Resultat soll in einer Anwendung zuerst erläutert werden. Wenn die Projection der Flächenorte sollte auf einer

Fläche

Fläche entworfen werden, die auf der Kante $\frac{1}{p}c : \frac{1}{m}a$ in dem Octaeder $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ senkrecht steht, so würde dieses Octaeder so gewendet werden müssen, daß diese Kante vertikal steht, denn ihre Richtung wird die von γ; α wird die aus dem Mittelpunkt auf die Kante gezogene Senkrechte; β steht auf α und γ senkrecht, bleibt also mit b identisch. Nach den aus dieser Bestimmung sich ergebenden Werthen:

$$\cos x = \cos(\alpha..a) = \frac{\frac{1}{p}c}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}} \qquad \cos x' = \cos(\alpha..b) = 0$$

$$\cos y = \cos(\beta..a) = 0 \qquad \cos y' = \cos(\beta..b) = 1$$

$$\cos z = \cos(\gamma..a) = \frac{-\frac{1}{m}a}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}} \qquad \cos z' = \cos(\gamma..b) = 0$$

$$\cos x'' = \cos(\alpha..c) = \frac{\frac{1}{m}a}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}$$

$$\cos y'' = \cos(\beta..c) = 0$$

$$\cos z'' = \cos(\gamma..c) = \frac{\frac{1}{p}c}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}$$

hat man den Ausdruck für die Fläche $\boxed{\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c}$ in diesen Richtungen α, β, γ:

$$\frac{1}{\dfrac{\frac{\mu}{p}c}{a\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}+\dfrac{\frac{\pi}{m}a}{c\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}} : \frac{1}{\frac{\nu}{b}} : \frac{1}{\dfrac{-\frac{\mu}{m}}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}+\dfrac{\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}}$$

$$= \frac{ac\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}{\frac{\mu}{p}c^2+\frac{\pi}{m}a^2} : \frac{b}{\nu} : \frac{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}{\frac{\pi}{p}-\frac{\mu}{m}}$$

$$= \boxed{\frac{ac}{\frac{\pi}{m}a^2+\frac{\mu}{p}c^2} : \frac{1}{\nu}\,\frac{b}{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}} : \frac{1}{\frac{\pi}{p}-\frac{\mu}{m}}}$$

Bei zwei- und eingliedrigen Systemen ist es oft sehr zweifelhaft, welche von den gepaarten Flächen als Säulenflächen zu betrachten sind, daher wird es nicht ohne Interesse sein, den Gebrauch dieses Flächenausdrucks an einem zwei- und eingliedrigen Systeme zu erläutern. Wir wollen das Augitsystem so stellen, daß das den Rhomboidflächen des Feldspaths entsprechende Paar $\boxed{-a : \frac{1}{2}b : c}$ die Säule bildet. Das Grundverhältniß des Augit ist:

$$a : b : c = \sqrt{13} : \sqrt{12} : \sqrt{1}$$

und der Werth von $m = 1$, $p = 1$, giebt das Grundverhältniß in den Richtungen

$$\alpha : \beta : \gamma = \sqrt{13} : \sqrt{\tfrac{12}{14}} : 1 = \sqrt{13} : \sqrt{\tfrac{6}{7}} : 1,$$

und die rationale Vervielfachung für die Fläche $\boxed{\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c}$ ist

$$\frac{\alpha}{\mu+13\pi} : \frac{\beta}{\nu} : \frac{\gamma}{\pi-\mu}.$$

Die am Augit beobachteten Flächen sind:

$a : b : \infty c$	$a : \infty b : c$	
$\frac{1}{3}a : b : \infty c$	$a : \frac{1}{2}b : c$	$-a : \frac{1}{2}b : c$
$a : \infty b : \infty c$	$a : \frac{1}{4}b : c$	$-a : \frac{1}{6}b : c$

$b : \infty a : \infty c$	$\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c$	$+\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c$
$c : \infty a : \infty b$		$-\frac{1}{5}a : \frac{1}{6}b : c$

Die Werthe von μ und π in dem Ausdruck der rationalen Vervielfachungen von α, β, γ gesetzt, giebt die Ausdrücke dieser Flächen in diesen Richtungen:

$\mu=1$, $\pi=0$, $\nu=1$ $\quad -\alpha : \beta : \gamma$

$\mu=3$, $\pi=0$, $\nu=1$ $\quad -\frac{1}{3}\alpha : \beta : \frac{1}{3}\gamma$

$\mu=1$, $\pi=0$, $\nu=0$ $\quad -\alpha : \infty\beta : \gamma$

$\mu=0$, $\pi=0$, $\nu=1$ $\quad \infty\alpha : \beta : \infty\gamma$

$\mu=0$, $\pi=1$, $\nu=0$ $\quad 1\frac{1}{3}\alpha : \infty\beta : \gamma$

$\mu=-1$, $\nu=0$, $\pi=1$ $\quad \frac{1}{5}\alpha : \infty\beta : \gamma$

$\mu=-1$, $\nu=2$, $\pi=1$ $\quad \frac{1}{6}\alpha : \beta : \gamma$

$\mu=-1$, $\nu=4$, $\pi=1$ $\quad \frac{1}{6}\alpha : \frac{1}{2}\beta : \gamma$

$\mu=-3$, $\nu=2$, $\pi=1$ $\quad \frac{1}{5}\alpha : \beta : \frac{1}{2}\gamma$

$\mu=1$, $\nu=2$, $\pi=1$ $\quad \frac{1}{7}\alpha : \beta : \infty\gamma$

$\mu=1$, $\nu=6$, $\pi=1$ $\quad \frac{1}{7}\alpha : \frac{1}{3}\beta : \infty\gamma$

$\mu=3$, $\nu=4$, $\pi=1$ $\quad -\frac{1}{8}\alpha : \frac{1}{2}\beta : \gamma$

$\mu=5$, $\nu=6$, $u=1$ $\quad -\frac{1}{5}\alpha : \frac{1}{3}\beta : \frac{1}{2}\gamma$

Nach diesen Ausdrücken läßt sich die Projection nach dem im ersten Abschnitt gegebenen Verfahren entwerfen.

§. 40.

Der im §. 38. gegebene allgemeine Ausdruck einer Fläche muß noch weiter entwickelt werden; er erleidet dadurch noch eine Einschränkung, daß in ihm die Bedingung aufgenommen werden muß, daß α, β, γ krystallonomische Richtungen sind, welches dadurch ausgedrückt wird, daß $\cos x$, $\cos x'$, $\cos y$, $\cos z$ u. s. w. durch die allgemeinste krystallonomische Form ausgedrückt werden.

Es seien in Fig. 31. a. Taf. III. die mit α, β, γ bezeichneten Punkte die Durchschnittspunkte der durch den Mittelpunkt des Systems gelegten Richtungen α, β, γ mit der geraden Endfläche; der Durchschnittspunkt α sei bestimmt durch $\frac{m}{p}\frac{c}{a}$ und $\frac{n}{p}\frac{c}{b}$, (so daß die Richtung α bestimmt wäre durch $\left(\frac{m}{a} : \frac{n}{b} : \frac{p}{c}\right)$), β durch $\frac{m'}{p'}\frac{c}{a}$ und $\frac{n'}{p'}\frac{c}{b}$, und γ durch $\frac{m''}{p''}\frac{c}{a}$ und $\frac{n''}{p''}\frac{c}{a}$. Der Cosinus von α gegen a ist gleich dem Sinus von α gegen die Ebene der bc, $= \frac{m}{p}\frac{c}{a}$, dividirt durch die Länge der Richtung α vom Mittelpunkt bis zur geraden Endfläche, d. i.

$$= \frac{\frac{m}{p}\frac{c}{a}}{\sqrt{\left[\left(\frac{m}{p}\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{p}\frac{c}{b}\right)^2 + 1\right]}}$$

Dasselbe gilt auch in Beziehung auf die Neigungen von α gegen b, von β gegen a u. s. w. Daher haben wir:

$$\cos x = \frac{mc}{pa\sqrt{\left[\frac{m^2}{p^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{n^2}{p^2}\frac{c^2}{b^2} + 1\right]}}$$

$$\cos x' = \frac{nc}{pb\sqrt{\left[\frac{m^2}{p^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{n^2}{p^2}\frac{c^2}{b^2} + 1\right]}}$$

$$\cos x'' = \frac{c}{c\sqrt{\left[\frac{m^2}{p^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{n^2}{p^2}\frac{c^2}{b^2} + 1\right]}}$$

$$\cos y = \frac{m'c}{p'a\sqrt{\left[\frac{m'^2}{p'^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{n'^2}{p'^2}\frac{c^2}{b^2} + 1\right]}}$$

$$\cos y' = \frac{n'c}{p'b\sqrt{\left[\frac{m'^2}{p'^2}\frac{c^2}{a^2} + \frac{n'^2}{p'^2}\frac{c^2}{b^2} + 1\right]}}$$

$$\cos y'' = \frac{c}{c\sqrt{\left[\frac{m'^2}{p'^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n'^2}{p'^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}$$

$$\cos z = \frac{m''c}{p''a\sqrt{\left[\frac{m''^2}{p''^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n''^2}{p''^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}$$

$$\cos z' = \frac{n''c}{p''b\sqrt{\left[\frac{m''^2}{p''^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n''^2}{p''^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}$$

$$\cos z'' = \frac{c}{c\sqrt{\left[\frac{m''^2}{p''^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n''^2}{p''^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}$$

Hiernach wird der allgemeine Ausdruck der Fläche $\left[\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c\right]$

$$\frac{\frac{p}{c}\sqrt{\left[\frac{m^2}{p^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n^2}{p^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}{\frac{\mu m}{a^2}+\frac{\nu n}{b^2}+\frac{\pi p}{c^2}} : \frac{\frac{p'}{c}\sqrt{\left[\frac{m'^2}{p'^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n'^2}{p'^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}{\frac{\mu m'}{a^2}+\frac{\nu n'}{b^2}+\frac{\pi p'}{c^2}}$$

$$: \frac{\frac{p''}{c}\sqrt{\left[\frac{m''^2}{p''^2}\frac{c^2}{a^2}+\frac{n''^2}{p''^2}\frac{c^2}{b^2}+1\right]}}{\frac{\mu m''}{a^2}+\frac{\nu n''}{b^2}+\frac{\pi p''}{c^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{c}\right)^2\right]}}{\frac{\mu m}{a^2}+\frac{\nu n}{b^2}+\frac{\pi p}{c^2}} : \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{m'}{a}\right)^2+\left(\frac{n'}{b}\right)^2+\left(\frac{p'}{c}\right)^2\right]}}{\frac{\mu m'}{a^2}+\frac{\nu n'}{b^2}+\frac{\pi p'}{c^2}}$$

$$: \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{m''}{a}\right)^2+\left(\frac{n''}{b}\right)^2+\left(\frac{p''}{c}\right)^2\right]}}{\frac{\mu m''}{a^2}+\frac{\nu n''}{b^2}+\frac{\pi p''}{c^2}}$$

In diesen Werthen müßte nun noch die Relation von m, m', m'', n, n', n'' u. s. w. aufgenommen werden, die dadurch ent-

steht, daß die Richtungen α, β, γ senkrecht auf einander stehen. Dadurch bleiben von den 6 Größen $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$, $\frac{m'}{p'}$, $\frac{n'}{p'}$, $\frac{m''}{p''}$, $\frac{n''}{p''}$ nur drei willkührlich, die andern drei bestimmen sich aus der Bedingung, daß die betrachteten Richtungen auf einander senkrecht stehen sollen. Diese Bedingung können wir dadurch ausdrücken, daß wir die Eigenschaft: daß die Summe der Quadrate der Cosinusse der Neigungen von a gegen α, β, γ gleich 1 ist, und eben so die Summe dieser Quadrate für die Neigungen b gegen α, β, γ u. s. w. — mit den gefundenen Werthen in α und β und γ verbinden:

$$\frac{m^2}{a^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{c}\right)^2\right]}+\frac{m'^2}{a^2\left[\left(\frac{m'}{a}\right)^2+\left(\frac{n'}{b}\right)^2+\left(\frac{p'}{c}\right)^2\right]}+\frac{m''^2}{a^2\left[\left(\frac{m''}{a}\right)^2+\left(\frac{n''}{b}\right)^2+\left(\frac{p''}{c}\right)^2\right]}=1$$

$$\frac{n^2}{b^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{c}\right)^2\right]}+\frac{n'^2}{b^2\left[\left(\frac{m'}{a}\right)^2+\left(\frac{n'}{b}\right)^2+\left(\frac{p'}{c}\right)^2\right]}+\frac{n''^2}{b^2\left[\left(\frac{m''}{a}\right)^2+\left(\frac{n''}{b}\right)^2+\left(\frac{p''}{c}\right)^2\right]}=1$$

$$\frac{p^2}{c^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{c}\right)^2\right]}+\frac{p'^2}{c^2\left[\left(\frac{m'}{a}\right)^2+\left(\frac{n'}{b}\right)^2+\left(\frac{p'}{c}\right)^2\right]}+\frac{p''^2}{c^2\left[\left(\frac{m''}{a}\right)^2+\left(\frac{n''}{b}\right)^2+\left(\frac{p''}{c}\right)^2\right]}=1$$

Aus diesen drei Gleichungen werden sich drei Größen $\frac{n'}{p'}$, $\frac{m''}{p''}$, $\frac{n''}{p''}$ bestimmen durch die andern drei $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$, $\frac{m'}{p'}$, und die so

gefundenen Bestimmungen in den Flächenausdruck gesetzt, giebt die allgemeinste Form desselben in Beziehung auf alle krystallonomisch möglichen, unter einander senkrecht stehenden Richtungen.

§. 41.

Zur Erläuterung des Entwickelten diene folgende Anwendung. Ein zwei- und zweiflächiges Octaeder soll so gestellt werden, daß eine seiner Kanten, die von zweierlei Flächen gebildet wird (eine ein- und einseitige Kante *)), vertikal stehe, daß diese Kantenrichtung die Richtung γ sei; die zweierlei Flächen, die diese Kante bilden, sind anzusehen als eine ein- und einseitige Säule, und sie bestimmen die horizontale Zone dieser Stellung. In dieser horizontalen Zone liegt noch eine Säulenfläche des zwei- und zweiflächigen Octaeders; deren Normale soll die Richtung β sein, so ist α dadurch bestimmt, daß seine Richtung senkrecht auf β und γ ist. Es seien Fig. 31. b. Taf. IV. $\frac{mc}{pa}$ und $\frac{nc}{pb}$ die Flächenorte des zwei- und zweiflächigen Octaeders $\left[\frac{1}{m}a : \frac{1}{p}c : \infty b\right]$ $\left[\frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c : \infty a\right]$, so ist die Richtung von α die aus dem Mittelpunkt des Systems auf die Linie $\left[\frac{m}{p}\frac{c}{a} : \frac{n}{p}\frac{c}{b}\right]$ gezogene Senkrechte, da der Durchschnittspunkt von β mit der geraden Endfläche im Unendlichen der Linie

*) Die Terminologie der Kanten geht davon aus, daß einmal die Seiten jeder Richtung unterschieden werden, und dann, daß die Stellen des Körpers, welche durch die Kante verbunden sind, mit in die Bezeichnung der Kante aufgenommen werden müssen. So sind in einem zwei- und zweigliedrigen Octaeder nur zwei- und einseitige Kanten, weil alle Kanten von gleichen Flächen gebildet werden, aber immer zwischen zweierlei Stellen des Octaeders liegen. Am viergliedrigen Octaeder sind die Lateralkanten zweiseitige Kanten, am zwei- und zweiflächigen Octaeder sind die Endkanten ein- und einseitig, die Lateralkanten sind zweiseitig. Am Rhomboeder sind die Endkanten zwei- und einseitig, die Lateralkanten zweiseitig.

$\left[\frac{m}{p}\frac{c}{a} : \frac{n}{p}\frac{c}{b}\right]$ liegt, (weil β mit ihr parallel ist). Die Richtung γ ist die, die senkrecht auf der Ebene (α, β) steht, also senkrecht auf der Ebene, die durch den Mittelpunkt und die Linie $\left[\frac{m}{p}\frac{c}{a} : \frac{n}{p}\frac{c}{b}\right]$ gelegt ist. Die Richtung α schneidet die gerade Endfläche in dem Punkt, der von der Linie $c\alpha$, (die senkrecht auf $\left[\frac{m}{p}\frac{c}{a} : \frac{n}{p}\frac{c}{b}\right]$ steht), auf $\left[\frac{m}{p}\frac{c}{a} : \frac{n}{p}\frac{c}{b}\right]$ bestimmt wird. Dieser Punkt wird durch das Verhältniß $\frac{m}{p}\frac{c}{a} = cd$ und $\frac{n}{p}\frac{c}{a} = ce$ bestimmt, daher hier

$$m = mn^2a^2$$
$$n = nm^2b^2$$
$$p = p(m^2b^2 + n^2a^2),$$

$$\text{weil } cd = \frac{m}{p}\frac{c}{a} = \frac{mn^2a^2}{p(m^2b^2 + n^2a^2)} \text{ und } ce = \frac{n}{p}\frac{c}{b}$$
$$= \frac{nm^2b^2}{p(m^2b^2 + n^2a^2)}\frac{c}{b}.$$

Für den Durchschnittspunkt von β, im Unendlichen von $\left[\frac{m}{p}\frac{c}{a} : \frac{n}{p}\frac{c}{b}\right]$, durch $\frac{m'}{p'}\frac{c}{a}$ und $\frac{n'}{p'}\frac{c}{b}$ bestimmt, ist

$$m' = -m$$
$$n' = n$$
$$p' = 0.$$

Für den Durchschnittspunkt von γ, senkrecht auf der Ebene $\left|\frac{m}{a} : \frac{n}{b} : \frac{p}{c}\right|$, ist

$$m'' = -\frac{a^2}{mc^2}$$
$$n'' = -\frac{b^2}{nc^2}$$
$$p'' = \frac{1}{p}.$$

Diese Werthe von m, n, p, m′, n′ u. s. w. in den allgemeinen Ausdruck der Fläche $\left|\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}\right|$ des vorigen §. gesetzt, und von den anzuwendenden Reductionen Gebrauch gemacht, giebt

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}}+\frac{1}{\frac{c^2}{p^2}}\right)}}{\frac{\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}}{\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}}+\frac{\frac{\pi}{p}}{\frac{c^2}{p^2}}} : \frac{\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right]}}{-\frac{\mu m}{a^2}+\frac{\nu n}{b^2}} : \frac{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}{-\frac{\mu}{m}-\frac{\nu}{n}+\frac{\pi}{p}}.$$

Aus diesem Flächenausdruck kann man unmittelbar jenen §. 39. gegebenen, wo die Endkante eines zwei- und zweikantigen Octaeders in die Richtung γ gestellt war, herleiten, — er ist in sofern allgemein, als man irgend eine Zone zur horizontalen machen kann, wenn β senkrecht auf dem Endgliede dieser Zone steht, senkrecht auf der Fläche, die aus dieser Zone zugleich in der horizontalen Zone liegt. Soll also die Kantenzone eines zwei- und zweikantigen Octaeders $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$ zur horizontalen gemacht werden, und zwar die, welche zwischen $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{p}c : \infty b\right|$ und $|b : \infty a : \infty c|$ liegt, so tritt hier $|b : \infty a : \infty c|$ anstatt der Fläche $\left|\frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c : \infty a\right|$, auf welche die Entwickelung bezogen wurde, d. h. es wird $n = \infty$ in dem allgemeinen Ausdruck, und dadurch wird dieser:

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{p^2}{c^2}\right]}}{\frac{\mu m}{a^2}+\frac{\pi p}{c^2}} : \frac{1}{\nu}b : \frac{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}{\frac{\pi}{p}-\frac{\mu}{m}} =$$

$$\left|\frac{ac\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}{\frac{\mu}{p}c^2+\frac{\pi}{m}a^2} : \frac{1}{\nu}b : \frac{\sqrt{\left[\frac{a^2}{m^2}+\frac{c^2}{p^2}\right]}}{\frac{\pi}{p}-\frac{\mu}{m}}\right|$$

§. 42.

Nach dieser allgemeinen analytischen Behandlung des Gegenstandes, auf den wir geführt wurden durch unser Problem, die Projection der Flächenorte auf jeder beliebigen Krystallfläche zu entwerfen, wenden wir uns zu einer solchen Lösung dieser Aufgabe, wie sie sich unmittelbar an unsere graphische Darstellung anschließt. Es muß nämlich durch den ganzen Hergang des Abgehandelten hinlänglich klar geworden sein, daß, wie der Zusammenhang aller Glieder mit dem Grundkörper jedes Systems durch die bloße Beobachtung der Zonen erkannt wird, so auch das Schema auf der geraden Endfläche von dem Grundkörper aus nach diesem Zusammenhang der Zonen kann construirt werden. Eine einfache Erläuterung wird das System des Boraxes geben. Man beobachtet an ihm eine geschobene vierseitige Säule, mit abgestumpften Seitenkanten, und einer auf der vordern Säulenkante gerade aufgesetzten schiefen Endfläche. Die scharfen Endkanten des Hendyoeder, das durch die Säulenfläche und diese schiefe Endfläche gebildet ist, haben zwei Abstumpfungsflächen, eine obere und eine untere; von der untern Abstumpfungsfläche bildet sich eine Zone nach der anliegenden vordern Säulenfläche, in welcher eine Fläche aus der Diagonalzone der vordern schiefen Endfläche liegt; von dieser Diagonalfläche bildet sich eine Zone nach der hintern untern, nicht anliegenden, sondern gegenüber liegenden Abstumpfungsfläche der scharfen Endkante des Hendyoeders; und in dieser Zone liegt die obere anliegende Abstumpfungsfläche der Endkanten des Hendyoeders. — Nach diesen Beobachtungen der Zonen ist das Schema des Boraxes in Fig. 32. entworfen; wir sind ausgegangen von der vordern schiefen Endfläche und den hintern untern Abstumpfungen der scharfen Endkante des Hendyoeders, und haben die diesen Flächen entsprechenden Orte e und g, g' willkührlich gesetzt, unter der allgemeinen Bedingung, daß e einer schiefen Endfläche entspricht, also in der Richtung α liegt, und g, g' gleiche Flächen aus der Diagonalzone einer hintern schiefen Endfläche sind. Von

diesen drei Punkten aus bestimmen sich alle übrigen beobachteten Glieder; die Flächen der geschobenen vierseitigen Säule, parallel mit c, liegen in den Zonen ge, g'e, daher ad ⋕ ge, und ad' ⋕ g'e, d. h. ad und ad' sind parallel mit den Normalen dieser Säulenflächen. Von g bildet sich eine Zone nach der anliegenden Säulenfläche, gi ⋕ ad', und diese bestimmt in der Diagonalzone von der vordern schiefen Endfläche ei, den Flächenort i; von i bildet sich eine Zone nach dem gegenüberstehenden g', und diese bestimmt in der Zone ge den Flächenort f, wodurch das durch unsere Beobachtung Gegebene erschöpft ist.

Solchen Gebrauch werden wir von dieser Methode der graphischen Darstellung beim Studium eines in seiner Gliederung noch nicht gekannten Systems immer machen, und dasselbe Prinzip leitet uns bei der Lösung des uns vorliegenden Problems. Wie nämlich hier von den Flächenorten e, g, g' die Bestimmung der übrigen Flächenorte sich ergab durch die Ziehung von Zonenlinien, — so bedarf es bei der Entwerfung der Projection der Flächenorte auf irgend eine Ebene nur der Bestimmung der Flächenorte auf dieser Ebene, welche die Zonenlinien bestimmen, deren gegenseitige Durchschnittspunkte die Orte der übrigen Flächen sind. Eine gute Wahl zu diesen ersten Flächenorten, von denen die übrigen durch Ziehung der Zonenlinien hergeleitet werden sollen, wird deren immer nur sehr wenige bedürfen, drei oder vier.

§. 34.

Um diese ersten Flächenorte zu bestimmen, werden wir wiederum darauf zurückgewiesen, daß wir ihre Beziehungen zu zwei rechtwinkligen Dimensionen der Fläche, auf welcher die Projection entworfen werden soll, aufsuchen, zu zwei Diagonalen derselben. Ein Flächenort ist auf irgend einer Fläche bestimmt — wenn die Kantennormale, in der er liegt, durch ihre Neigung gegen die Diagonale bestimmt ist, — und wenn die Länge dieser Kantennormale auf der Fläche, auf welcher die Projection

zu entwerfen ist, von ihrem Flächenorte bis zu dem Flächenorte, dessen Lage bestimmt werden soll, gekannt ist. Durch die Lage der Kantennormale, in Beziehung auf zwei Dimensionen der Fläche, auf welcher die Entwerfung geschehen soll, und durch die so eben bezeichnete Länge dieser Kantennormale ist der zu bestimmende Flächenort fixirt; er ist es durch die Länge und Lage seines Radiusvectors. Die Neigung dieses Radiusvectors gegen die Dimensionen der Fläche zu finden, hat der vorige Abschnitt, und die Länge desselben zu bestimmen, der zweite Abschnitt gelehrt; denn diese ist ja keine andere, als die Tangente für die Neigung der Normale, die dem zu fixirenden Flächenorte angehört, gegen die Normale, auf deren Fläche der Ort fixirt werden soll, wenn diese Normale auch hier, wie bei der Entwerfung der Projection auf die gerade Endfläche geschah, gleich Eins gesetzt wird. Sind so diese ersten Flächenorte auf der jedesmal vorliegenden Fläche bestimmt, so bedarf es nur, daß wir das System von Zonenlinien, das uns die Projection auf die gerade Endfläche gewährt, auf diese Fläche übertragen.

Ehe wir den Ausdruck der allgemeinen Entwickelung suchen, wollen wir das Gesagte in einigen Anwendungen erst erläutern.

Stellen wir uns die Aufgabe, die Projection der Flächenorte eines rhomboedrischen Systems auf einer Fläche des Grundrhomboeders zu entwerfen, und wählen dazu das System des Kalkspaths. Um die Betrachtung einfacher zu erhalten, begnügen wir uns, nur die Flächen des ersten und zweiten schärfern Rhomboeders, des ersten stumpfern, die Flächen des metastatischen Drei- und Dreikantners vom Grundrhomboeder, und die Flächen der beiden sechsseitigen Säulen außer den Flächen des Grundrhomboeders in Betracht zu ziehen. In Fig. 33. sind die Orte dieser Flächen auf die gerade Endfläche projicirt; es sollen dieselben auf die Fläche a des Grundrhomboeders projicirt werden. — Die Wahl der ersten Flächenorte, die der Bestimmung der übrigen Flächenorte zum Grunde liegen sollen, kann hier nun wohl mit

gleichem Vortheil sehr verschieden ausfallen; wir könnten z. B. a', a'' und c, oder a', a'' und e, e', oder b', b'' und s, s' u. s. w. wählen; überall haben wir nur hier die Lage zweier Flächenorte auf der Rhomboederfläche zu bestimmen, indem die zwei andern die ihnen entsprechenden symmetrischen sind. Wir wollen ausgehen von den Punkten d, d', d'' und c, weil deren Bestimmungen vor den genannten und vor andern das voraus haben, daß bei ihnen die Neigungen der Kantennormalen, in denen sie liegen (des Radiusvectors) gegen die Diagonale der Rhomboederfläche unmittelbar gegeben sind, und wir dürfen hier nur die Längen ad', ad, ac auf der Rhomboederfläche bestimmen, d. i. $\operatorname{tng}(ad')$, $\operatorname{tng}(ad)$, $\operatorname{tng}(ac)$, wenn die Normale von der Fläche, die dem Orte a entspricht, $= 1$ ist, und (ad') die Neigung der Normale des Flächenortes d' gegen die des Flächenortes a u. s. w. bezeichnet. Legen wir für das Kalkspathsystem das Verhältniß $s : c = 1 : 1$ zum Grunde, so ist

$$\operatorname{tng}(ac) = 1$$

$$\operatorname{tng}(ad) = \frac{\operatorname{tng}(ac) + \operatorname{tng}(dc)}{1 - \operatorname{tng}(ac)\operatorname{tng}(dc)} = \frac{1 + 2}{1 - 2}$$

$$\operatorname{tng}(ad) = -3.$$

$$\operatorname{tng}(ad') = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

In Fig. 34. werden wir also von a, als dem Flächenorte der Rhomboederfläche, auf welcher die Projection entworfen wird, $ac = 1$, $ad = -3$, und $ad' = ad'' = \sqrt{\tfrac{3}{2}}$ machen, wodurch die Flächenorte d, d', d'' und c auf der Fläche des Grundrhomboeders bestimmt sind.

Wie in Fig. 35. die übrigen Flächenorte durch die Zonenlinien bestimmt sind, wird man leicht verfolgen können. Der Ort a' ist bestimmt durch die Zonenlinien dd' und $d''c$, wie a'' durch dd'' und $d'c$ bestimmt ist; der Durchschnitt von aa' und dd'' bestimmt s', und der von aa'' und dd' bestimmt s, die Flächen der zweiten sechsseitigen Säule u. s. w. Die Sache scheint keiner weitern Auseinandersetzung zu bedürfen.

§. 44.

Aus dieser geometrischen Bestimmung der übrigen Flächenorte ergiebt sich ihre numerische sehr einfach; im Allgemeinen ist es die Aufgabe der analytischen Geometrie, den Durchschnittspunkt zweier gegebenen geraden Linien zu bestimmen. Wir erhalten:

$$\text{tng}(ad) = -3$$
$$\text{tng}(ab) = +3$$
$$\text{tng}(a\varsigma') = -1$$
$$\text{tng}(ac) = +1$$
$$\text{tng}(am) = +\tfrac{3}{5}$$
$$\text{tng}(an) = -\tfrac{3}{7}.$$

Diese Werthe der Tangenten für die Neigungen der verschiedenen Flächen in der vertikalen Zone, bilden die Reihe:

$$-1, +1, -\tfrac{1}{3}, +\tfrac{1}{3}, +\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{7},$$

die ganz analog sind den Neigungsverhältnissen der vertikalen Zone der zwei- und eingliedrigen Systeme, indem die Cotangenten der in Rede stehenden Neigungen fortschreiten in der bekannten Reihe der ungeraden Zahlen:

$$-1, +1, -3, +3, +5, -7.$$

Diese Reflexion führt uns auf ein anderes, bei krystallonomischen Untersuchungen häufig wiederkehrendes Problem: es sind zwei Flächen gegeben, der Krystall soll so gestellt werden, daß diese zu Säulenflächen werden, die Projection der Flächenorte auf der geraden Endfläche dieser Säule zu entwerfen. Im vorliegenden Falle ist die Fläche a gegeben, sie soll als gerade Abstumpfung der vordern Säulenkante (die Säule wird von Flächen aus ihrer Diagonalzone d', d'' gebildet) gedacht, und die Projection auf der geraden Endfläche dieser Säule entworfen werden. Für die Neigungen der Flächen der vertikalen Zone gegen die Axe dieser Stellung sind die Verhältnisse der sie bestimmenden trigonometrischen Linien identisch mit denen, die wir bei den zwei- und eingliedrigen Systemen kennen.

Der wesentliche Unterschied dieser Aufgabe von der vorigen ist

der, daß die Fläche, auf der die Projection zu entwerfen ist, nicht im Schema gegeben ist, sondern erst bestimmt werden muß; ist sie bestimmt, so haben wir nur das Verfahren anzuwenden, das wir in seiner Allgemeinheit für die Entwerfung der Flächenorte auf jeder beliebigen Fläche ausgesprochen haben. Im vorliegenden Falle, da die gerade Endfläche in der vertikalen Zone liegen muß, wird sie dadurch bestimmt, daß ihre Neigung gegen die Fläche a rechtwinklig ist. Die mit der Fläche $\overset{c}{\boxed{\frac{2}{m}s : \frac{1}{m}s : \frac{2}{m}s}}$ einen rechten Winkel bildende Fläche ist $\overset{c}{\boxed{2ms : ms : 2ms}}$, also in unserem Fall ist die Projection zu entwerfen auf $\overset{c}{\boxed{2s : s : 2s}}$ d. i. auf der Fläche des Gegenrhomboeders, deren Ort in Fig. 33. mit x bezeichnet ist. In Fig. 36. ist die Projection der Flächenorte auf dieser Fläche entworfen *).

§. 45.

Es wird hinlänglich sein, die Allgemeinheit des Verfahrens bei den dreiaxigen Systemen zu entwickeln. Es seien die Flächenorte des Schwerspathsystems Fig. 37. auf eine Fläche zu projiciren, die die gerade Endfläche sein würde, wenn dieses System so gestellt wäre, daß $\boxed{-a : b : c}$ und $\boxed{-b : c : \infty a}$ zu Säulenflächen würden. Die Zonenlinie de entspräche also

*) Geben wir die Ausdrücke der Flächen in den dieser Stellung entsprechenden Dimensionen, so kann es wohl überraschen, die große Analogie derselben mit den Ausdrücken in zwei- und eingliedrigen Systemen zu sehen. Es gilt aber allgemein, daß zwei- und einflächige Ecken sowohl wie ein- und einseitige Kanten, in jeder Abtheilung der Systeme überall dieselbe Entwickelung erleiden; eine nicht unbedeutende Gewährleistung für die Naturgemäßheit der Darstellung des Zusammenhanges der zwei- und eingliedrigen Systeme, wie wir sie in den Abhandlungen des Professor Weiß besitzen. Die Ausdrücke der Flächen sind:

der horizontalen Zone dieser Stellung, und da sie $[-\frac{1}{2}\alpha : -\beta]$ ist, d. h. durch $-\frac{1}{2}\frac{c}{a}$ und $-\frac{c}{b}$ geht, so ist die Zonenaxe nach §. 14. bestimmt durch $\left(\frac{2a^2}{c^2}\frac{c}{a} : \frac{b^2}{c^2}\frac{c}{b}\right)$; da aber diese Zonenaxe die Normale der geraden Endfläche dieser Stellung ist, so ist diese $\left|\frac{1}{2a^2}a : \frac{1}{b^2}b : \frac{1}{c^2}c\right|$. Legen wir das Verhältniß $a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{[5+(\frac{1}{2})^2]}$ zu Grunde, so wird der Ausdruck dieser Fläche: $\left|\frac{1}{4}a : \frac{1}{3}b : \frac{4}{21}c\right|$ = x in Fig. 37 *). Auf ihr ist

b $|a : c : \infty b|$ a′ $|a : \frac{1}{2}b : c|$ e″ $|a : \frac{1}{6}b : c|$

d $|-a : c : \infty b|$ e'''' $|-a : \frac{1}{2}b : c|$

e $|\frac{1}{3}a : c : \infty b|$

e′ $|-\frac{1}{3}a : c : \infty b|$ s′ $|-\frac{1}{5}a : \frac{1}{2}b : c|$ σ″ $|-\frac{1}{5}a : \frac{1}{2}b : c|$

b′ $|\frac{1}{5}a : \frac{1}{2}b : c|$

e′ $|-\frac{1}{7}a : \frac{1}{2}b : c|$

d′ $|a : b : \infty c|$

s″ $|b : \infty a : \infty c|$

a $|a : \infty b : \infty c|$

$$a : b : c = 3\sqrt{2} : 2\sqrt{3} : \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

*) Um auf den Gebrauch allgemeiner analytischer Methoden, die noch wenig in der Krystallographie beachtet sind, aufmerksam zu machen, geben wir hier eine analytische Entwickelung für die Bestimmung der Fläche, die auf zwei gegebenen Flächen senkrecht steht. Nennen wir die Normale der einen Fläche N, und die der andern N′, und bezeichnen wir mit (N′) die letztre Normale, wenn sie verlängert wird, bis sie die andere Fläche schneidet, so muß, wenn beide Flächen auf einander senkrecht stehen, (N′) = ∞ sein. Die rationale Vervielfachung von N′, damit es (N′) wird, muß also = ∞ sein. Die Normale N gehöre der Fläche $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$, so ist $N = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}\right]}}$, und N′ gehöre der Fläche $\left|\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c\right|$

ist die Projection der Flächenorte des Schwerspathsystems zu entwerfen.

Um das Verfahren in seiner Allgemeinheit zu entwickeln,

---

so ist $N' = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right]}}$, und wenn N′ verlängert wird,

bis sie die Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ schneidet, so ist

$$(N') = \frac{1}{\left(\frac{m\mu}{a^2} + \frac{n\nu}{b^2} + \frac{p\pi}{c^2}\right)N'} = \frac{\sqrt{\left[\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right]}}{\frac{m\mu}{a^2} + \frac{n\nu}{b^2} + \frac{p\pi}{c^2}}$$

Die rationale Vervielfachung von N′, damit es (N′) wird, ist also

$\frac{1}{\left(\frac{m\mu}{a^2} + \frac{n\nu}{b^2} + \frac{p\pi}{c^2}\right)N'^2}$, und diese muß, in der Bedingung, daß beide Flächen senkrecht auf einander stehen, $= \infty$ sein, d. h. es muß

$$\frac{m\mu}{a^2} + \frac{n\nu}{b^2} + \frac{p\mu}{c^2} = 0$$

sein. Soll also die Fläche $\boxed{\frac{1}{x}a : \frac{1}{y}b : c}$ bestimmt werden, die mit $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c}$ $\boxed{\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c}$ rechte Winkel bildet, so ist

$$\frac{xm}{a^2} + \frac{yn}{b^2} + \frac{p}{c^2} = 0$$

$$\frac{x\mu}{a^2} + \frac{y\nu}{b^2} + \frac{\pi}{c^2} = 0,$$

aus welchen Gleichungen sich die Werthe von x und y entwickeln:

$$x = \frac{n\pi - \nu p}{\mu n - m\nu}\,\frac{a^2}{c^2}$$

$$y = \frac{\mu p - m\pi}{\mu n - mn}\,\frac{b^2}{c^2}$$

so daß der Ausdruck der zu bestimmenden Fläche wird:

$$\boxed{\frac{1}{(n\pi - \nu p)a^2}a : \frac{1}{(\mu p - m\pi)b^2}b : \frac{1}{(\mu n - m\nu)c^2}c}$$

$= \boxed{\frac{1}{Ma^2}a : \frac{1}{Nb^2}b : \frac{1}{Pc^2}c}$, wenn M N und P in derselben Be-

werden wir die vier Flächenorte des Grundoctaeders auf der Fläche x bestimmen, weil von ihnen aus sich immer alle übrigen Flächenorte durch Ziehung von Zonenlinien herleiten lassen. Es seien Fig. 38. die vier Flächenorte eines Octaeders $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$ in a, b, d, f; die Fläche x sei $\left|\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c\right|$ und die auf sie projicirten Orte des Octaeders seien in Fig. 39. in a, b, d, f; die Linie xc entspricht der Linie xc in Fig. 38.

---

deutung genommen worden, wie im §. 3., und wie sie überhaupt in dem bisher Abgehandelten gebraucht sind; sie sind die vervielfachenden Werthe von α und β in dem Ausdruck der Zone $\frac{1}{p}(M\alpha : N\beta)$, die durch die Flächen $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$ und $\left|\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c\right|$ bestimmt wird, — sie sind dasselbe für die Zonenebenen, was wir mit m, n und p im allgemeinen Ausdruck der Flächen bezeichnen.

Wir schließen hier füglich an die allgemeine-analytische Entwickelung des Neigungsverhältnisses zweier Flächen $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{p}c\right|$ und $\left|\frac{1}{\mu}a : \frac{1}{\nu}b : \frac{1}{\pi}c\right|$; der Cosinus ihrer Neigung ist $= \frac{N}{(N')}$, wie aus der Anschauung dieser Normalen hervorgeht, und deshalb das Neigungsverhältniß:

$$\sin : \cos = \sqrt{[(N')^2 - N^2]} : N.$$

Werden für N, N′, (N′) ihre Werthe gesetzt, so ist

$$\cos = \frac{N}{(N')} = NN'\left(\frac{\mu m}{a^2} + \frac{\nu n}{b^2} + \frac{\pi p}{c^2}\right)$$

$$= \frac{\frac{\mu m}{a^2} + \frac{\nu n}{b^2} + \frac{\pi p}{c^2}}{\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right]}\ \sqrt{\left[\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right)}},$$

$\sin : \cos =$

$$\sqrt{\left(\left(\frac{\mu n - m\nu}{ab}\right)^2 + \left(\frac{\mu p - m\pi}{ac}\right)^2 + \left(\frac{n\pi - \nu p}{bc}\right)^2\right)} : \frac{\mu m}{a^2} + \frac{\nu n}{b^2} + \frac{\pi p}{c^2}$$

$$= \sqrt{\left(\left(\frac{M}{bc}\right)^2 + \left(\frac{N}{ac}\right)^2 + \left(\frac{P}{ab}\right)^2\right)} : \frac{\mu m}{a^2} + \frac{\nu n}{b^2} + \frac{\pi p}{c^2}$$

Für die Bestimmung des Punktes a wird nach dem Obigen verlangt, einmal der Winkel axp, und dann die Länge ax. Das Analoge wird für die Bestimmung der drei andern Flächenorte verlangt. Was diese Längen xa, xb u. s. w. betrifft, so ist ihre Bestimmung im vorigen §. angedeutet; — erinnern wir uns aber, daß jeder derselben eine andere irrationale Grundzahl entspricht, und daß deshalb die Aufzeichnung nicht ohne Weitläuftigkeit sein wird, und sind wir uns bewußt, daß beim weitern Gebrauch dieser Projection es nur Interesse hat, die Beziehungen der projicirten Flächenorte zu zwei Dimensionen der Fläche x zu kennen, zu xc und xr, so werden wir es vorziehen, statt der angegebenen Bestimmungen z. B. xa und tng axp für a, dessen Bestimmung durch pa und qa aufzusuchen. Nennen wir den $\angle$ axp $= \alpha$, und ax $= 1$, so haben wir zwar

$xp = \frac{1}{\sqrt{[1 + tng^2 a]}}$, $ap = \frac{1 \, tng \, \alpha}{\sqrt{[1 + tng^2 a]}}$; allein wir werden einfacher zur Bestimmung von xp aus den Verhältnissen in Fig. 38. auf eine mehr directe Weise gelangen. Ziehen wir nämlich in Fig. 38. aus a eine Linie ap senkrecht auf cp, und von p eine Linie nach dem Mittelpunkt des Systems, so ist diese dieselbe Linie, die in Fig. 39. von p nach dem Mittelpunkt des Systems gezogen wird, und bezeichnen wir den Mittelpunkt durch 0, so hat 0p gegen 0x dieselbe Neigung in Fig. 38. und in Fig. 39.; xp ist aber die Tangente dieser Neigung, wenn 0x, die Normale der Fläche, worauf die Projection entworfen wird, $= 1$ gesetzt wird; nachdem dieses xp bestimmt wäre, hätten wir ap $=$ xp tng α.

Zur Bestimmung von xp haben wir also in Fig. 38. die Tangente von der Neigung von 0x gegen 0p zu suchen, welche die Differenz der Neigungen von 0x und 0p gegen die Axe ist. Die Neigungen gegen die Axe giebt das Schema, wenn p in seinen Beziehungen zu den Dimensionen wie x gekannt ist. Wir können aber cp auch als Cos. des $\angle$ acp, wenn rad. $=$ ac ist, betrachten; — tng acp $=$ tng (gcp — gca) $=$

$\frac{(\nu m - n\mu)ab}{m\mu b^2 + n\nu a^2}$; $\cos acp = \frac{m\mu b^2 + n\nu a^2}{\sqrt{[m^2b^2+n^2a^2]}\sqrt{[\mu^2 b^2+\nu^2 a^2]}}$;

$\sin acp = \frac{(m\nu - \mu n)ab}{\sqrt{[m^2a^2 + n^2b^2]}\sqrt{[\mu^2 a^2 + \nu^2 b^2]}}$. Damit nun

$\sqrt{[\sin^2 + \cos^2]} = ac = \frac{c}{p}\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]}$ werde, d. h. damit

$\cos acp = pc$ und $\sin acp = ap$ werde, müssen ihre Werthe

mit $\frac{c}{p}\sqrt{\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]}$ multiplicirt werden, und so wird

$$cp = \left(\frac{m\mu}{a^2} + \frac{n\nu}{b^2}\right) \frac{c}{p\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right)}}.$$

Dieser Werth cp ist die Tang. der Neigung von 0p gegen die Axe; die Tang. für die Neigung 0x gegen die Axe ist

$$cx = \left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right) \frac{c}{\pi\sqrt{\left[\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right]}}.$$

Die Tang. der Differenz beider Neigungen ist:

$$\text{tng}\, p0x = \frac{\frac{\mu(\mu p - m\pi)}{a^2} + \frac{\nu(\nu p - n\pi)}{b^2}}{\frac{m\mu}{a^2} + \frac{n\nu}{b^2} + \frac{p\pi}{c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mu^2 c^2}{a^2} + \frac{\nu^2 c^2}{b^2}\right)}}$$

Diese Tang. p0x ist der Werth von xp in Fig. 39.

Es bleibt uns jetzt noch das Neigungsverhältniß für den Winkel axp in Fig. 39. zu bestimmen. Das Grundverhältniß der Fläche x ist $\frac{abc}{N} = abc\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right)}$ und

$$\text{tng}\, axp = \frac{m\nu - n\mu}{\mu(\mu p - m\pi)b^2 + \nu(\nu p - n\pi)a^2}\, abc\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{m\nu - n\mu}{\frac{\mu(\mu p - m\pi)}{a^2} + \frac{\nu(\nu p - n\pi)}{b^2}} \frac{c}{ab}\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right)}$$

Da nun in Fig. 39. $ap = px \operatorname{tng} axp$ ist, so haben wir für xp und ap die gesuchten Werthe:

$$xp = \frac{\frac{\mu(\mu p - m\pi)}{a^2} + \frac{\nu(\nu p - n\pi)}{b^2}}{\frac{m\mu}{a^2} + \frac{n\nu}{b^2} + \frac{p\pi}{c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mu^2 c^2}{a^2} + \frac{\nu^2 c^2}{b^2}\right)}}$$

$$ap = \frac{m\nu - n\mu}{\frac{m\mu}{a^2} + \frac{n\nu}{b^2} + \frac{p\pi}{c^2}} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{c^2}\right)}}{ab\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{a^2} + \frac{\nu^2}{b^2}\right)}}$$

Diese Werthe xp und ap sind allgemein gültig, und erleiden nur eine Aenderung nach der nähern Bestimmung der Vorzeichen von m und n, so daß z. B. für die Bestimmung des Flächenortes f, in ihnen statt m und n muß $-m$, $-n$ gesetzt werden.

Wenden wir uns nun zu dem uns vorliegenden Fall im Schwerspathsystem, so haben wir $\mu = 16$, $\nu = 12$, $\pi = 21$, und $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{\frac{21}{4}}$, und wir erhalten:

$$xp = \frac{44p - 42m - 21n}{2m + n + p} \cdot \frac{1}{\sqrt{21.44}}$$

$$ap = \frac{3m - 4n}{2m + n + p} \sqrt{\left(\frac{65}{6.44}\right)}.$$

Für den Flächenort a ist $m = 1$, $n = 1$, $p = 1$, daher

$$xp = -\tfrac{19}{4} \sqrt{\left(\frac{1}{44.21}\right)}$$

$$ap = -\tfrac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{65}{6.44}\right)}$$

Für b ist $m = 1$, $n = -1$, $p = 1$, also $xp = \frac{23}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{44.21}\right)}$, $ap = \frac{7}{2} \sqrt{\left(\frac{65}{6.44}\right)}$. Für f ist $m = -1$, $n = -1$, $p = 1$, und $xp = -\frac{107}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{44.21}\right)}$, $ap = -\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{65}{6.44}\right)}$. Für d ist

$m = -1$, $n = 1$, $p = 1$, und $xp = \infty$, $ap = \infty$, $\frac{ap}{xp} = -\frac{7}{65}\sqrt{\left(\frac{65.21}{6}\right)}$, d. h. die Normale von d liegt in der horizontalen Zone dieser Stellung, und hat gegen die Diagonale cx dieser Stellung eine Neigung, deren Tangente $\frac{7}{65}\sqrt{\left(\frac{65.21}{6}\right)}$ ist. In Fig. 40. sind nach diesen Werthen der Ordinaten der vier Flächenorte des Grundoctaeders dieselben in a, b, d, f aufgetragen, und zwar d in der Art, daß tng dxc $=$ $\frac{7}{65}\sqrt{\left(\frac{65.21}{6}\right)}$ ist, wo alsdann d im Unendlichen der Richtung dx liegt. In Fig. 37. ist jeder Flächenort mit einer besondern Zahl bezeichnet, und ihnen correspondiren dieselben Zahlen für dieselben Orte in Fig. 40. *). Werden nun diese vier Flächenorte durch gerade Linien verbunden (die Verbindung mit d geschieht bekanntlich, indem mit dx aus den andern Flächenorten Parallellinien gezogen werden), so entstehen drei Durchschnittspunkte, 11, 12, c, entsprechend den Abstumpfungsflächen der schärfern und der stumpfern Seitenkante der Säule des Schwerspaths und der geraden Endfläche. Durch 11 und 12 ist die horizontale Zone derselben bestimmt, und in ihr werden durch die vorhergezogenen Kantenzonenlinien des Schwerspath-Octaeders 13 und 14 bestimmt. Zwischen d und f, und c und 12 liegt 1, zwischen a und b, und c und 12 liegt 2. Zwischen c und 11, und a und d liegt 3, und zwischen c und 11, und b und f liegt 4; da aber c—11 und b—f parallel sind, ihr Durchschnittspunkt im Unendlichen liegt, so gehört 4 in die horizontale Zone, und ihre Normale ist parallel mit c—11 und b—f u. s. w. Die Zeichnung weiset die Bestimmung der übrigen Flächenorte nach.

---

*) In Fig. 37. sind die Flächen der horizontalen Zone nicht mit Zahlen bezeichnet; es entspricht aber dem |b : ∞a : ∞c| 11, dem |a : ∞b : ∞c| 12, dem |a : b : ∞c| 13, dem |a : − b : ∞c| 14. —

§. 46.

Obgleich dieses in völliger Allgemeinheit angegebene Verfahren schon eine so grosse Einfachheit in der wirklichen Ausführung gewährt, so wird man doch selten Gelegenheit haben, sich desselben bedienen zu müssen, wenn man die Vortheile bei Untersuchungen dieser Art zu benutzen weiss. In dem so eben behandelten Falle z. B. bedurfte es nur der Kenntniss der Neigungsverhältnisse in der Zone de, der horizontalen Zone dieser Stellung, in welcher die Flächen d, 5, 4 und $\boxed{a : -\frac{1}{2}b : \infty c}$ liegen, und der Bestimmung irgend zweier Flächenorte auf der Fläche x z. B. c und 12, so lassen sich von diesen aus, indem mit den Linien, die mit den Normalen der horizontalen Zone dieser Stellung parallel sind, Parallelen gezogen werden, die übrigen Flächenorte bestimmen, wie die Ansicht der Fig. 40. nachweiset. Bestimmte man die Fläche x Fig. 37. in ihrem Zonenzusammenhang mit den übrigen Flächen, so bedürfte es nur in Fig. 40. der Bestimmung des Ortes c, um die übrigen Orte herzuleiten, mit Hülfe der Neigungsverhältnisse in der Zone de.

Da die Projectionen der Flächenorte auf die verschiedenen Flächen des regulären Systems von einem besondern Interesse beim Studium desselben sind, so mögen beispielsweise einige der wichtigsten den Beschluss dieses Abschnittes machen.

In Fig. 41. ist die Projection der Orte der oben in §. 11. angegebenen Flächen auf der Octaederfläche dargestellt. Die Octaederfläche ist ein gleichseitiges Dreieck, in dessen Ecken die Orte der Würfelflächen liegen, und in dessen Mitte ihr eigener Ort liegt *). Durch diese einfache Bemerkung ist alles gegeben,

*) Die Orte der Würfelflächen sind in Figur 41. durch kleine Quadrate bezeichnet, die der Octaederflächen durch Dreiecke. Die übrigen Flächenorte sind nur in einem Sechstheil der Figur bezeichnet, weil es leicht ist, die übrigen in den andern Sechstheilen liegenden Orte hiernach zu erkennen, da nach Analogie des Rhomboedrischen hier eine vollkommene Symmetrie in allen Sechstheilen herrscht. Das Granatoeder ist durch G, die Pyramidenwürfel sind durch Pw, die Py-

was zur Bestimmung der übrigen Flächenorte dient. Die Seiten des gleichseitigen Dreiecks, die Kantenzonenlinien des Würfels führen in die Orte der Granatoederflächen, die senkrecht auf der Octaederfläche, auf der die Projection dargestellt ist, stehen, die in der horizontalen Zone dieser Stellung liegen. Deshalb, da die drei andern Octaederflächen zwischen den Würfelflächen und diesen Granatoederflächen liegen, werden die Durchschnitte der Linien, die aus den Ecken des Dreiecks parallel mit den gegenüberstehenden Seiten gezogen werden, die Orte dieser drei andern Octaederflächen sein. So ist uns der Würfel mit seinem Gegenkörper, dem Octaeder, gegeben, und von ihnen aus werden sich die übrigen Flächenorte methodisch bestimmen lassen, was bei der hier entstehenden Mannigfaltigkeit derselben nicht ohne Werth ist. Wir sprechen hier die Regeln dieser methodischen Bestimmung allgemein, in Bezug auf jede Fläche, auf welcher die Octaeder- und Würfel-Flächenorte bestimmt sind, aus *).

1) Man verbinde die Octaeder-Flächenorte und Würfel-Flächenorte unter einander durch die Octaeder-Kantenzonenlinien und Würfel-Kantenzonenlinien. Die entste-

---

ramidenoctaeder durch Po, die Leucitoide durch L, die Achtundvierzig-Flächner durch beigeschriebene Zahlen bezeichnet, und zwar $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$ durch 1, $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a|$ durch 2, und $|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a|$ durch 3. Eben so sind in den Gattungen der Pyramidenwürfel, Pyramidenoctaeder, und der Leucitoide die Arten durch beigeschriebene Zahlen unterschieden, und zwar ist $|a : \frac{1}{2}a : \infty a|$ durch Pw 2, und $|a : \frac{1}{3}a : \infty a|$ durch Pw 3 bezeichnet, und $|\frac{1}{2}a : a : a|$ ist durch L 2, $|\frac{1}{3}a : a : a|$ durch L 3, $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a|$ durch Po 2, und $|\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a|$ durch Po $\frac{3}{2}$ unterschieden.

*) Diese Regeln sind in dem in §. 11. vom Zusammenhang der Glieder des sphäroedrischen Systems Gesagten im Wesentlichen enthalten. — Der Leser wird zur bestimmtern Auffassung derselben gut thun, wenn er bei der Lesung derselben sogleich selbst die geforderten Linien zieht; er wird sich so überzeugen, daß die Sache viel einfacher ist, als die Darstellung sie zu geben vermag.

henden sechs Durchschnittspunkte sind die Orte der Granatoeder-flächen. In unserm vorliegenden Falle sind drei der Octaeder-Kantenzonenlinien parallel mit den Würfel-Kantenzonenlinien, woraus sich ergiebt, daß drei Granatoederflächen in der horizontalen Zone dieser Stellung liegen.

2) Man verbinde alle Granatoeder-Flächenorte unter einander durch die Granatoeder-Kantenzonenlinien; es sind deren vier. Die entstehenden zwölf neuen Durchschnitte sind die Flächenorte des Leucitoeders. Im vorliegenden Falle liegen drei derselben auf der Octaederfläche innerhalb ihrer eigentlichen Begrenzung am Octaeder, sechs liegen in ihrer weitern Ausdehnung in den Diagonal-Zonenlinien des Würfels, d. i. in den Seiten des Dreiecks, das um das Dreieck der Octaederfläche in ihrer eigentlichen Begrenzung (das wir abgekürzt: Octaederdreieck nennen wollen) umschrieben ist, zwischen jedem Würfelort und Octaederort, und drei Leucitoeder-Flächenorte liegen in der horizontalen Zone; denn die Zonenlinie der drei in der horizontalen Zone liegenden Granatoederflächen wird von den drei durch den Mittelpunkt des Schema gehenden Octaeder-Kantenzonenlinien in drei Punkten geschnitten, die Orten von Leucitoederflächen angehören.

3) Man verbinde jeden Granatoeder-Flächenort mit jedem Octaeder-Flächenort. In sofern die Granatoederflächen in den Kantenzonen des Octaeders liegen, ist die Verbindung schon in 1) geschehen; alle übrigen, hier geforderten Verbindungslinien entsprechen den Diagonalzonenlinien des Octaeders. Im vorliegenden Falle wird jeder der drei Granatoeder-Flächenorte, die in der Mitte der Seiten des Octaederdreiecks liegen, mit den zwei Octaederflächen, zwischen welchen er nicht liegt, verbunden, und um das Dreieck, dessen Ecken die drei Octaederflächenorte sind, wird ein neues Dreieck, das mit ihm parallele Seiten hat, beschrieben. Die Seiten dieses umschriebenen Dreiecks sind die Verbindungslinien zwischen den Octaeder-Flächenorten und den Granatoeder-Flächenorten der ho-

rizontalen Zone. Durch diese Diagonalzonenlinien des Octaeders, deren immer zwölf sind, werden in den schon gezogenen Linien, indem sie diese durchschneiden, die Flächenorte bestimmt von dem Pyramidenwürfel $\boxed{a : \frac{1}{2}a : \infty c}$, von dem niedern Leucitoid $\boxed{a : a : \frac{1}{3}a}$, und von den Sechsmalacht-Flächnern $\boxed{a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a}$ und $\boxed{a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a}$.

a. In den Würfelkantenzonenlinien entstehen zwölf Durchschnittspunkte, sie sind die Flächenorte des genannten Pyramidenwürfels $\boxed{a : \frac{1}{2}a : \infty a}$. Im vorliegenden Falle liegen sechs von ihnen in den Seiten des Octaederdreiecks, und sechs liegen in den Seiten des so eben erwähnten zweiten umschriebenen Dreiecks, wo diese von den verlängerten Seiten des Octaederdreiecks geschnitten werden.

b. In den Octaederkantenzonen-Linien entstehen gleichfalls zwölf Durchschnittspunkte, sie sind die Flächenorte des erwähnten niedern Leucitoids $\boxed{a : a : \frac{1}{3}a}$; in unserm vorliegenden Falle liegen drei derselben innerhalb des Octaederdreiecks, sechs in den Seiten des um dasselbe umschriebenen Dreiecks, dessen Ecken die Octaederflächenorte sind, und drei in den Ecken des um dieses umschriebenen Dreiecks.

c. In den Granatoederkantenzonen-Linien entstehen vierundzwanzig Durchschnittspunkte, sie sind die Flächenorte des erwähnten Pyramidengranatoeders $\boxed{a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a}$. Von ihnen liegen in unserm Falle hier sechs innerhalb des Octaederdreiecks, sechs innerhalb des Dreiecks, das um dieses umschrieben ist, und sechs in den Seiten des Dreiecks, das um dieses wiederum umschrieben ist, und endlich liegen sechs von ihnen in der horizontalen Zone dieser Stellung des sphäroedrischen Systems; denn da diese eine Granatoederkantenzone ist, so wird ihre Zonenlinie gleichfalls geschnitten. Diese in dieser horizontalen Zone liegenden Flächen von $\boxed{a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a}$ haben ihren Ort im Unendlichen der Diagonalzonenlinien des Octaeders.

d. Die Diagonalzonenlinien des Octaeders durchschneiden sich gegenseitig in vier und zwanzig Punkten, und bestimmen so die Flächenorte von $\boxed{a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a}$. In unserm Falle liegen sechs von ihnen innerhalb des Octaederdreiecks, sechs innerhalb des um dieses umschriebenen Dreiecks und sechs in den Seiten des um dieses wiederum umschriebenen Dreiecks, und sechs in den Verlängerungen dieser Seiten *).

4) Man verbinde jeden Leucitoederflächenort mit jedem Würfelflächenort; — dies geschieht durch die Linien der Kantenzonen der vierflächigen Ecken des Leucitoeders, durch die vier Kantenzonenlinien jeder vierflächigen Ecke desselben **). Es sind dieser Zonenlinien immer zwölf.

a. Mit den Würfelkantenzonen-Linien entstehen durch diese Kantenzonenlinien des Leucitoeders keine neuen Durchschnitte; in ihnen wird kein neues Glied bestimmt.

b. In den Octaederkantenzonen-Linien entstehen zwölf Durchschnittspunkte, die die Flächenorte des Pyramidenoctaeders $\boxed{\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : a}$ sind. Im vorliegenden Falle sind drei von ihnen innerhalb des Octaederdreiecks, drei innerhalb des um dasselbe umschriebenen Dreiecks, und sechs in den verlängerten Seiten desselben.

c. In den Granatoederkantenzonen-Linien entsteht kein neuer Durchschnittspunkt, in ihnen wird kein neues Glied hervorgerufen.

d. In den Diagonalzonenlinien des Octaeders werden die Orte für 3 verschiedene Achtundvierzig-Flächner bestimmt,

---

*) In der Figur sind diese letzten sechs Orte nicht angegeben, damit die übrigen Orte nicht zu sehr in einander gedrängt werden möchten. Die an der Verlängerung der Seite des erwähnten Dreiecks gesetzte, in Klammern eingeschlossene Zahl (3), möge den Leser auf dieses Fehlen aufmerksam machen.

**) In sofern dies Leucitoeder zwischen dem Würfel und dem Octaeder liegt, ist die Verbindung zwischen Leucitoeder und dem Würfel schon da durch die Octaederkantenzonen-Linien.

nämlich für $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a|$, für $|\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a|$ und für $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$ von denen der erste bis jetzt nur als beobachtet bekannt ist, der zwischen dem niedern Leucitoid und $|a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a|$ liegt; deshalb müssen die zwischen diesen zwei Gliedern entstehenden Durchschnittspunkte auf den Diagonalzonenlinien des Octaeders als die Orte von $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a|$ bezeichnet werden.

Im vorliegenden Falle liegen sechs von den Flächenorten dieses Achtundvierzig-Flächners innerhalb des Octaederdreiecks, sechs in dem umschriebenen Dreiecke, und sechs innerhalb des um dieses umschriebenen Dreieckes, und sechs in dessen verlängerten Seiten *).

5) Man verbinde jeden Leucitoederflächenort mit jedem Granatoederflächenort **), welches durch die Linien der Kantenzonen der dreiflächigen Ecken des Leucitoeders geschieht.

a. In den Kantenzonen des Würfels entstehen zwölf neue Durchschnittspunkte; sie entsprechen den Flächenorten des Pyramidenwürfels $|a : \frac{1}{3}a : \infty a|$. In unserm Falle liegen sechs in den Seiten des Octaederdreiecks, und sechs in den verlängerten Seiten desselben.

b. In den Kantenzonenlinien des Octaeders entstehen 24 neue Durchschnittspunkte, sie sind die Flächenorte des Pyramidenoctaeders $|\frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a|$ und des Leucitoides $|\frac{1}{4}a : a : a|$; letzteres ist als beobachtet noch nicht bekannt. Die zwölf zwischen den Granatoederflächenorten und den Octaederflächenorten entstehenden Durchschnittspunkte müssen als die Flächenorte von

*) Die letzten sechs Orte fehlen wieder in der Fig. 41.; die an die verlängerte Seite des Dreiecks geschriebene (2) soll dieses andeuten.

**) In sofern das Leucitoeder in der Kantenzone des Octaeders liegt, und in der Kantenzone des Granatoeders ist diese Verbindung schon da.

$|\frac{1}{5}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a|$ bezeichnet werden. In unserm vorliegenden Falle liegen drei von ihnen innerhalb des Octaederdreiecks und drei innerhalb des um dieses umschriebenen Dreiecks, und sechs in dessen verlängerten Seiten.

Hiermit ist das, was die Beobachtung bis jetzt hat kennen gelehrt, erschöpft. Diese angegebenen (fünf) Regeln mit ihren Nebenbestimmungen gelten für jede Projection der Flächenorte auf irgend eine Fläche, und für die fortschreitende Beobachtung neuer Glieder können sie nur in demselben Sinne, wie sie hier ausgesprochen sind, weiter fortgeführt werden *). Für einzelne Glieder, die unter den durch das angegebene Verfahren bestimmten nicht begriffen sind, wird man am einfachsten durch die Ziehung der Zonenlinien, die zu ihrer unmittelbaren Bestimmung allein dienen, die Orte in der jedesmaligen Projection erhalten. —

---

*) Die Deduktion der bekannten Flächen erforderte nur die Combination der Kantenzonen der dreiflächigen Ecken des Leucitoeders mit den Würfelkantenzonen und den Octaederkantenzonen. Zur vollständigen Kenntniß derjenigen Glieder, die durch den Conflikt dieser Zonen mit den schon daseienden hervorgerufen werden, fügen wir dem Vorhergehenden hinzu:

c. In den Kantenzonenlinien des Granatoeders entstehen keine neue Durchschnittspunkte, in ihnen werden keine neue Glieder hervorgerufen.

d. In den Diagonalzonenlinien des Octaeders werden durch die Kantenzonen der dreiflächigen Ecken des Leucitoeders bestimmt die Achtundvierzig-Flächner $|\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a|$, $|a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{7}a|$ und $|\frac{1}{2}a : \frac{1}{5}a : \frac{1}{7}a|$.

e. In den Kantenzonenlinien der vierflächigen Ecken des Leucitoeders entstehen zweierlei Durchschnittspunkte, sie sind die Flächenorte von $|a : \frac{1}{5}a : \frac{1}{6}a|$ und $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{7}a|$.

Es kann dem Leser nicht entgehen, wie hiermit der allgemeine Entwickelungsgang des regulären Systems ausgesprochen ist, gleichsam der mittlere, der die Individualität der Entwickelung der einzelnen Gattung aufhebt. Dieses weiter zu verfolgen, wird eine spätere, besondere Betrachtung des regulären Systems Gelegenheit geben.

Die Normalen der Octaederflächen liegen zwischen den drei Grunddimensionen des regulären Systems, so daß sie zu jeder derselben gleiche Beziehung haben, — deshalb haben sie drei gleiche Seiten (latera), die Octaederrichtungen sind dreiseitig. Deshalb müssen die Beziehungen der Glieder des sphäroedrischen Systems auf sie eine vollkommene Analogie mit den Verhältnissen in den rhomboedrischen Systemen gewähren; und unsere Projection Fig. 41. weiset diese in jeder Beziehung nach *).

---

*) In der Projection gehören die im Octaederdreieck liegenden Flächenorte einer Ecke des Würfels, wenn er rhomboedrisch gestellt wird, an. Beziehen wir die den drei andern ihr gleichen Würfelecken angehörigen Flächen auch auf sie, so können wir in der Terminologie der rhomboedrischen Systeme die in Figur 41. projicirten Glieder folgendermaßen bezeichnen. Vom Würfel ausgegangen haben wir das erste, zweite und dritte stumpfere Rhomboeder, und das erste und zweite schärfere, deren Orte die Ecken der in- und umschriebenen Dreiecke in Bezug auf das Octaederdreieck sind. In der Kantenzone des Würfels, in der Terminalhälfte sind die Glieder mit 2fachem und 3fachem Sinus, bei gleichem Cosinus, in der Lateralhälfte, die mit 2fachem und 3fachem Cosinus bei gleichem Sinus. In der Kantenzone des ersten stumpfern Gliedes der Hauptreihe sind da, in der Terminalhälfte: das Glied mit 3fachem Sinus, in der Lateralhälfte: die Glieder mit 2fachem, 3fachem und und 5fachem Cosinus. Aus der Kantenzone des zweiten stumpfern Gliedes das Glied mit 3fachem Cosinus, bei gleichem Sinus, und aus der Kantenzone des dritten stumpfern Gliedes der Hauptreihe das Glied mit 8fachem Cosinus bei gleichem Sinus. In der Terminalhälfte der Kantenzonen des ersten schärfern Gliedes sind die Glieder mit 2fachem und 3fachem Sinus, und in der Lateralhälfte die mit ½fachem und 2fachem Cosinus. In der Terminalhälfte der Kantenzone des zweiten schärfern Gliedes sind die Glieder mit 2fachem, 3fachem und 4fachem Sinus, in der Lateralhälfte die mit ½fachem und 2fachem Cosinus. Aus der vertikalen Zone der zweiten sechsseitigen Säule sind die Glieder hier, die in Vergleich mit dem Gliede dieser Zone, das zugleich in der Kantenzone des Würfels liegt, für ihre Neigung gegen die Axe ½fachen und 2fachen Sinus haben, bei gleichem Cosinus, und die 2fachen, 3fachen und 4fachen Cosinus bei gleichem Sinus haben. Aus der Vertikalzone der ersten sechsseitigen Säule sind außer den Gliedern der Hauptreihe, ein Rhomboeder erster Ordnung zwischen dem Würfel und dem zweiten stumpfern Gliede, nämlich das mit ⅘fachem

§. 47.

In Fig. 42. ist die Projection der Flächenorte auf der Granatoederfläche entworfen. Die Granatoederfläche selbst giebt uns wiederum alle Bestimmungen, um den im vorigen §. angegebenen Gang der Zonenentwickelung zu construiren und damit die Flächenorte zu bestimmen. Nämlich zwei gegenüberstehende Ecken an der längern Diagonale des Rhombus, dessen Diagonalen sich verhalten wie $1 : \sqrt{2}$, entsprechen zweien Würfelflächenorten, und der Ort der dritten Würfelfläche liegt im Unendlichen der kleinen Diagonale. Die beiden andern gegenüberstehenden Ecken an der kürzern Diagonale entsprechen zweien Octaederflächenorten, und die Orte der zwei andern Octaederflächen liegen im Unendlichen der Seiten des Rhombus der Granatoederfläche. Es sind uns also die Flächenorte des Würfels und des Octaeders gegeben, und wenn wir von ihnen aus die im vorigen §. angegebenen Combinationen construiren, gelangen wir zu allen übrigen Flächenorten. — Die Bezeichnung der einzelnen Flächenorte ist dieselbe, die im vorigen §. angegeben ist.

Die Richtung der Granatoederfläche, ihre Normale, liegt zwischen zwei Grundrichtungen des Systems, und zwischen zwei octaedrischen Richtungen, ist zwei und zweiseitig, deshalb müssen

---

Sinus bei gleichem Cosinus mit der Würfelfläche in der Neigung gegen die Axe — und zwei Rhomboeder zweiter Ordnung, nämlich das mit 5fachem Sinus und das mit $\frac{1}{5}$fachem Cosinus — und dann liegt in dieser Zone noch das Gegenrhomboedr des Würfels u. s. w. Das Schema giebt diese Beziehungen alle unmittelbar, und fast eben so unmittelbar gelangt man zu den Ausdrücken dieser Flächen in Bezug auf die Richtungen in der uns vorliegenden Octaederfläche. Nämlich um in den rhomboedrischen Dimensionen des Würfels diese Ausdrücke zu geben, würde man die aus dem Mittelpunkt des Octaederdreiecks nach dessen Ecken gezogenen Linien als die Einheiten von σ, σ' und σ'' nehmen, und durch die Verhältnisse von ihren Vervielfachungen jeden Ort bestimmen.

Für die Berechnung der Neigungsverhältnisse ist der Werth von dieser Einheit von $\sigma = \sqrt{2}$.

die Glieder des sphäroedrischen Systems auf sie bezogen eine vollkommene Analogie mit dem Zwei- und Zweigliedrigen gewähren. Die Ansicht und die genauere Betrachtung des Schema wird dieses in jeder Beziehung bestätigen. —

Sollte die Projection der Flächenorte auf der Fläche eines Achtundvierzig-Flächners entworfen werden, so wird man im Allgemeinen sich des Dreiecks bedienen können, das für die Fläche durch die drei in ihrem Ausdruck $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ gegebene Bestimmungen in den drei Grunddimensionen bestimmt ist, des Dreiecks, das entsteht, wenn man die drei angegebenen Punkte $\frac{1}{m}a$, $\frac{1}{n}a$, und $\frac{1}{p}a$ durch gerade Linien verbindet. Nach den dreierlei Seiten dieses Dreiecks, nämlich $m\sqrt{[n^2+p^2]}$ und $n\sqrt{[m^2+p^2]}$ und $p\sqrt{[m^2+n^2]}$, wird man dasselbe entwerfen, und dadurch sind die drei Würfelflächenorte auf dieser Fläche $\boxed{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a}$ bestimmt.

Theilt man nun die Seite $m\sqrt{[n^2+p^2]}$ in zwei Theile, die sich verhalten wie $\frac{1}{n} : \frac{1}{p}$, und die Seite $n\sqrt{[m^2+p^2]}$ in zwei Theile, die sich verhalten wie $\frac{1}{m} : \frac{1}{p}$, und die Seite $p[\sqrt{m^2+n^2}]$ wie zwei gleiche Theile, die in dem Verhältniß $\frac{1}{m} : \frac{1}{n}$ stehen, und verrichtet diese Theilung in der Art, daß die Theile $\frac{1}{m}$ auf $n\sqrt{[m^2+p^2]}$ und $\frac{1}{m}$ auf $p\sqrt{[m^2+n^2]}$ an derjenigen Ecke dieses Dreiecks liegen, die in $\frac{1}{m}a$ der Grunddimension liegt, und daß eben so die Theile $\frac{1}{n}$ auf $m\sqrt{[n^2+p^2]}$ und $\frac{1}{n}$ auf $p\sqrt{[m^2+n^2]}$ an der Ecke dieses Dreiecks liegen, die

die in $\frac{1}{n}$a der Grunddimension liegt, und eben so in Hinsicht auf den Theil $\frac{1}{p}$ auf $m\sqrt{[n^2+p^2]}$ und auf $n\sqrt{[m^2+p^2]}$, — theilt man auf diese Art die Seiten des Dreiecks, so sind in diesen Theilungspunkten die Orte dreier Granatoederflächen gegeben. Ihre Verbindungslinien sind die Kantenzonenlinien des Granatoeders, sie schneiden die verlängerten Seiten unsers Dreiecks in drei andern Punkten, entweder im Endlichen oder im Unendlichen, und diese drei Durchschnittspunkte sind die Orte der drei andern Granatoederflächen. Die nun noch nicht gezogenen Verbindungslinien zwischen den Würfelflächenorten und den Granatoederflächenorten sind die Kantenzonenlinien des Octaeders, und ihre gegenseitigen Durchschnittspunkte bestimmen die Flächenorte des Octaeders. Nun, da die Flächenorte des Würfels und des Octaeders bestimmt sind, treten die im vorigen §. gegebenen Regeln wieder in Anwendung. —

§. 48.

Es wird in vielen Fällen von wesentlichem Vortheil sein, sich dieser Projectionen auf die verschiedenen Flächen des regulären Systems zu bedienen, z. B. bei Untersuchungen über die hemiedrischen Gestalten. Wollte man unmittelbar und allein die Gestalt der Begrenzungsflächen haben, so wird man sich hier auch mit Vortheil der im §. 45. gegebenen Formeln für die Bestimmung der Flächenorte bedienen. Es soll z. B. das Fünfeck construirt werden, das den Begrenzungsflächen des Granatdioeders *) von $\boxed{a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a}$ zukömmt. Von den fünf

*) Granatdioder wird der Körper genannt, der entsteht, wenn von den vier Flächen eines Achtundvierzig-Flächners, die über jeder Granatoederfläche liegen, die zwei gegenüberstehenden wegfallen, und zwar so, daß sowohl an den vier- und vierkantigen Ecken des Achtundvierzig-Flächners als an den drei- und dreikantigen die abwechselnden Flächen fortfallen.



Ecken dieses Fünfecks ist die eine der Ort der Würfelfläche, die zweite der Ort der Octaederfläche, und die drei andern Ecken, die über den weggefallenen Flächen liegen, sind die Orte von $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a|$ *). In Fig. 42. b. sind diese fünf Flächenorte mit (1), (2), (3) u. s. w. bezeichnet; und es soll ihre Lage auf der Fläche $|a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a|$, deren Ort in 0 ist, bestimmt werden. In den im §. 45. gegebenen Ausdrücken für α und β wird $a = b = c = 1$, und $\mu = 3$, $\nu = 1$, $\pi = 5$, so daß wir haben

$$\alpha = \frac{5(2p - 3m - n)}{3m + n + 5p} \sqrt{\tfrac{1}{10}}$$

$$\beta = \frac{m - 3n}{3m + n + 5p} \sqrt{\tfrac{35}{10}}.$$

Für die Bestimmung des Flächenorts (1) ist $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$, des Flächenorts (2) $m = 1$, $n = 2$, $p = 3$ u. s. w.

(1), $m = 0$, $n = 0$, $p = 1$, $\alpha = 2\sqrt{\tfrac{1}{10}}$, $\beta = 0$

(2), $m = 1$, $n = 2$, $p = 3$, $\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{10}}$, $\beta = -\frac{1}{4}\sqrt{\tfrac{35}{10}}$

(3), $m = 1$, $n = 1$, $p = 1$, $\alpha = -\frac{10}{9}\sqrt{\tfrac{1}{10}}$, $\beta = -\frac{2}{9}\sqrt{\tfrac{35}{10}}$

(4), $m = 3$, $n = 1$, $p = 2$, $\alpha = -\frac{6}{4}\sqrt{\tfrac{1}{10}}$, $\beta = 0$

(5), $m = 2$, $n = -1$, $p = 3$, $\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{10}}$, $\beta = \frac{1}{4}\sqrt{\tfrac{35}{10}}$.

Man mache also in Fig. 42. b. $0(1) = 2$, $0(4) = \frac{6}{4}$, und $00' = \frac{1}{4}$, $0'(2) = 0'(5) = \frac{1}{4}\sqrt{35}$, so sind die Orte (1), (2),

*) Es ist eine sehr interessante Eigenschaft, sowohl der Granatdioedrischen als der Pyritoedrischen Gestalten, daß immer zwei derselben in dem Verhältniß stehen, daß sie sich gegenseitig fordern, daß bei der einen die Ecken in den Flächenorten des andern liegen, und Flächenorte in den Ecken der andern, und umgekehrt. In diesem Verhältniß bei den Granatdioedrischen Gestalten stehen die zwei gewöhnlichsten Achtundvierzig-Flächner $|a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a|$ und $|a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a|$. Allgemein sind die Ausdrücke dieser zwei zusammengehörigen Achtundvierzig-Flächner: $\left|\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{p}a\right|$ und, wenn $m \angle n \angle p$,

$$\left|\frac{1}{n-p}a : \frac{1}{n+p}a : \frac{m-n}{(m-n)(n+p)+2mp(n-p)}a\right|.$$

(4) und (5) auf der Fläche $\boxed{a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a}$ construirt, und für die Bestimmung von (3) ist $00'' = \frac{10}{9}$ und $0''3 = \frac{2}{9}\sqrt{35}$. So ist das verlangte Fünfeck entworfen. Man erkennt sogleich eine dasselbe sehr auszeichnende Eigenschaft, daß nämlich (1) (2) (4) (5) eine Raute ist, deren Diagonalen sich verhalten wie $\sqrt{7} : \sqrt{5}$. Für die Kantenlängen, für die Neigungsverhältnisse in den Kantenwinkeln, für die Neigungsverhältnisse der ebenen Winkel dieses Granatdioeders sind in dieser Construction des Fünfecks alle erforderliche Data gegeben.

Anhang.

Die Stellung und Umkehrung der Methode.

§. 49.

Das Verhältniß der Invertirung, worauf Haüy bei den Gliedern der Hauptreihe im Systeme des Kalkspaths aufmerksam machte, und das darin besteht, daß zwei Körper die Neigungsverhältnisse in den Kanten und in den ebenen Winkeln mit einander vertauschen, so daß bei dem einen Körper dieselben Neigungsverhältnisse in den Kanten, wie bei dem andern in den ebenen Winkeln, und umgekehrt *) statt finden, — kann aus einem viel allgemeinern Gesichtspunkte betrachtet werden. Im Kalkspathsystem stehen in diesem Verhältniß das Grundrhomboeder und das erste schärfere Rhomboeder, das erste stumpfere und das zweite schärfere, das zweite stumpfere und das dritte schärfere u. s. w.; das Gesetz ist hier leicht zu erkennen, von dem Rhomboeder $\boxed{\overset{(-2)^n c}{2s : s : 2s}}$ würde $\boxed{\overset{\frac{1}{(-2)^n} c}{s : \frac{1}{2}s : s}}$ das invertirte Rhomboeder sein. — Es ist hier nicht der Ort, dieses Verhält-

---

*) Strenger genommen sind für beiderlei Winkel dieselben, aber in Rücksicht ihrer Vorzeichen die entgegengesetzten Verhältnisse, d. h. beiderlei Winkel ergänzen sich zu 180°.

niß überhaupt näher zu entwickeln, und in allen seinen Beziehungen zu verfolgen; es genügt uns hier, darauf aufmerksam zu machen, wie dieses Verhältniß kein anderes sei, als das der Zonenebenen und der Krystallflächen. Die Ebenen der Kantenzonen des Grundrhomboeders sind identisch mit dem ersten schärfern Rhomboeder, und die Ebenen der Kantenzonen des ersten schärfern Rhomboeders sind identisch mit dem Grundrhomboeder. Dasselbe findet bei allen in diesem Verhältniß der Invertirung stehenden Gliedern statt, und zwar eben sowohl bei octaedrischen Gestalten als bei rhomboedrischen und dihexaedrischen. **Bei zwei invertirten Gestalten sind die Zonenebenen der einen die Flächen der andern, und die Flächen der ersten die Zonenebenen der andern; die Zonenrichtungen, Kantenrichtungen der ersten sind die Flächenrichtungen der andern, und die Flächenrichtungen sind die Zonenrichtungen der andern, und umgekehrt.** Wir wissen, daß die Zonenebenen und die Flächenrichtungen in einem Systeme dieselbe Beziehung zu dem Verhältniß in den drei Dimensionen $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ haben, als die Krystallflächen und Zonenrichtungen zu $a : b : c$; — denken wir uns demnach zwei Krystallsysteme, wo in dem einen $a : b : c = \sqrt{m} : \sqrt{n} : \sqrt{p}$, und in dem andern $a : b : c = \sqrt{\frac{1}{m}} : \sqrt{\frac{1}{n}} : \sqrt{\frac{1}{p}}$ ist, so werden diese zweierlei Krystallsysteme in dem Verhältniß der Invertirung stehen. Dies Verhältniß in dieser seiner Allgemeinheit genommen, abgesehen von seiner naturhistorischen Bedeutung, ist nicht ohne bedeutendes speculatives Interesse; beide Systeme stehen sich direct entgegen, es findet bei ihnen eine Umkehrung aller Verhältnisse statt, die sich am schärfsten in der Umkehrung der Verhältnisse der Grunddimensionen ausspricht, — was bei dem einen gleichsam nach Innen gewandt ist (die Zonenebenen und die Flächenrichtungen), ist bei dem andern gleichsam nach Außen gewandt (Krystallflächen und Zonenrichtungen).

Diese Umkehrung, Invertirung, — wie sie bei der Gleichheit der Dimensionen (wie im sphäroedrischen- und im Kalkspathsysteme) sich in demselben Systeme ausspricht, und hier gleichsam beide in dem Verhältniß der Invertirung stehende Systeme noch in einem und demselben Systeme enthalten sind, — tritt um so schärfer und trennender auf, je größer die Entfernung des Verhältnisses der Dimensionen von der Gleichheit derselben ist. —

§. 50.

Die im vorigen §. gemachte Bemerkung dient uns einmal, das Verhältniß der in dem Obigen gegebenen Behandlung der krystallonomischen Verhältnisse zu der herrschenden näher anzugeben, und dann zu zeigen, wie auch für diese, bis jetzt im Gebrauch stehende Betrachtungsweise, unser Princip der graphischen Darstellung seine Anwendung erlaubt. In unseren Schematen wurden die Durchschnittspunkte der Flächenrichtungen, d. i. die Projectionen der Flächenorte, angegeben, und ihre Verbindungslinien untereinander waren die Durchschnitte der Zonenebenen; — die Flächenrichtungen und Zonenebenen waren die alleinigen Gegenstände unserer Betrachtung, von ihnen gingen unmittelbar alle unsere Fragen aus, und an sie schlossen sich uns alle krystallonomische Gesetzlichkeiten an. Zonenebenen und Flächenrichtungen sind uns dasjenige, was der herrschenden Behandlungsweise krystallonomischer Verhältnisse Zonenrichtungen und Krystallflächen sind. — So kann unsere Behandlungsweise des Gegenstandes gleichsam die invertirte von der üblichen genannt werden, ist im eigentlichsten Sinne ihr Gegenstück.

Um das Princip der graphischen Darstellung auf die Behandlungsweise, der die Betrachtung der Krystallflächen und der Zonenrichtungen zu Grunde liegt, anzuwenden, bedarf es nur, daß, wie in unserer die Projection der Flächenorte entworfen wurde, hier die Projection der Orte der Zonenebenen entworfen werde. Unser Schema können wir uns auf eine indirecte Weise als entstanden denken, indem durch den Mittelpunkt des Sy-

stems die Zonenebenen gelegt wurden, und diese die gerade Endfläche oder eine andere, auf der die Projection entworfen wurde, in geraden Linien schnitten, deren gegenseitige Durchschnittspunkte die Flächenorte waren. Wenn auf dieselbe Weise die Krystallflächen des Systems durch den Mittelpunkt desselben gelegt werden, so werden diese die gerade Endfläche oder irgend eine andere gleichfalls in geraden Linien schneiden, und deren Durchschnittspunkte untereinander werden die Orte der Zonenebenen sein. Wir nennen hier diese Durchschnittslinien Flächenlinien, wie vorhin die analogen Zonenlinien genannt wurden. — Es ist leicht zu übersehen, wie hier in dieser Darstellung der krystallonomischen Verhältnisse dasselbe nur umgekehrt statt findet, wie in der frühern. Was zuerst den Zusammenhang der verschiedenen Flächen nach ihren Zonen betrifft, so gilt hier, daß alle Flächen in derselben Zone liegen, deren Flächenlinien durch denselben Zonenort gehen, und daß eine Fläche alle die Zonenrichtungen in sich vereint, durch deren Zonenorte ihre Flächenlinie geht. Was ferner die ebenen Winkel der Krystallflächen betrifft, so sind ihre Verhältnisse auf dieselbe Weise in den Flächenlinien dargestellt, wie oben die Neigungsverhältnisse in den Zonen in den Zonenlinien dargestellt waren; und was endlich die Kantenwinkel hier betrifft, so gilt für ihre Neigungsverhältnisse dasselbe, was oben in Bezug auf die Neigungsverhältnisse der ebenen Winkel auseinander gesetzt ist. —

Ueber

den eigenthümlichen Entwickelungsgang der zwei- und eingliedrigen Krystallsysteme.

Die zwei- und eingliedrigen und die ein- und eingliedrigen Krystallsysteme haben am längsten dem klaren Verständniß widerstanden; durch die Arbeiten des Herrn Prof. Weiß ist es uns erst geworden. Eine hier folgende Reihe von Abhandlungen hat zum Zweck, mehrere für die Krystallonomie wichtige und für die Erhaltung eines unbefangenen Urtheils nothwendige Betrachtungen über die Systeme dieser Abtheilungen herauszuheben; und an sie wird sich eine Betrachtung anschließen über die numerischen Grundverhältnisse des Feldspathsystems, weil dessen Grundbestimmungen in den Dimensionen sich einer Sicherheit erfreuen, wie kein anderes System. Ehe wir unsere Betrachtung über die einzelnen für die Krystallkunde gewonnenen Systeme dieser Abtheilungen, und insbesondere der Abtheilung der zwei- und eingliedrigen Systeme beginnen, ist es nothwendig, uns auf eine klare Weise über den Entwickelungsgang der Systeme dieser Abtheilung zu verständigen, um so nothwendiger, da in der neuesten Zeit von einem sehr geehrten Mineralogen die Eigenthümlichkeit dieses Entwickelungsganges übersehen ist, und so, was durch eine tiefere Forschung für die Wissenschaft gewonnen war, durch ihn vielleicht wieder verwirrt werden könnte.

Auch hier wählen wir das Feldspathsystem, dessen Studium zuerst das Licht des klareren Verständnisses über die zwei- und eingliedrigen Systeme brachte, und das in Beziehung auf den Zusammenhang seiner Glieder die sicherste Bürgschaft leistet, zum Ausgangspunkt. Aus den Abhandlungen des Herrn Prof. Weiß in den Schriften der Königl. Acad. der Wissenschaften in Berlin müssen wir als Resultat der dortigen Untersuchungen und Beobachtungen auszugsweise diesen Zusammenhang hier wiederholen, um dem Leser Zusammengehöriges nicht zu trennen.

Wir gehen aus von einer geschobenen vierseitigen Säule, mit einer schiefen, auf der vordern Säulenkante gerade aufgesetzten Endfläche, von einer zwei- und einflächigen Säule, als von der ersten räumlichen Erscheinung der Thätigkeiten in den drei rechtwinkligen Dimensionen des Systems; diese Säule ist für den räumlichen Ausdruck der Thätigkeiten das Frühere, in Beziehung auf die übrigen Glieder; aber ihr und allen übrigen Gliedern steht das Verhältniß der Thätigkeiten in den Dimensionen:

$$a : b : c = \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{1} : \sqrt{\tfrac{1}{13}}.$$

Der zwischen den beiden Seiten der Richtung c eingetretene Unterschied, der ein Vorne und ein Hinten einsetzt, ist das Bestimmende dieser Abtheilung. Für den Zusammenhang der sich entwickelnden Glieder ist die Bestimmung des Verhältnisses der vordern und der hintern Seite die Fundamentalbestimmung; in diesem Verhältniß beruhen die Stufen eigenthümlicher Entwickelungen in der zwei- und eingliedrigen Abtheilung. — Beim Feldspath haben die Beobachtungen an den Carlsbader Zwillingsverwachsungen es über allen Zweifel erhoben, daß die vordere und hintere Fläche noch in dem Verhältniß mathematischer Gleichheit stehen, bei sehr bestimmtem Hervortreten ihres physikalischen Unterschiedes. Durch dieses Factum der mathematischen Gleichheit sind wir im Stande, durch die bloße Beobachtung der, bei weiterer Entwickelung sich einsetzenden Zonen, die übrigen Glieder zu bestimmen. Die Ansicht des Schema Fig. 43. a. *) wird den Zusammenhang der Glieder durch die Zonen

---

*) In Fig. 43. b. ist die Darstellung des Zusammenhanges der gegenseitigen Verhältnisse der verschiedenen Glieder des Krystallisationssystems des Feldspathes, durch die Projection der Flächenorte, der äußern Anschauung und Betrachtung mehr genähert, indem diese Darstellung mit einer perspectivischen Projection der Flächen und ihrer Gestalten verbunden ist. Ich glaubte dem, der noch nicht ganz mit der Methode vertraut ist, hierdurch keine unwesentliche Hülfe zur bessern Verständigung zu leisten. Die Sache selbst wird wohl durch die Zeichnung

leicht übersehen lassen. An die Stelle der Endkantenzonen der Octaeder der zwei- und zweigliedrigen und der viergliedrigen Systeme, oder der Rhomboeder und Dihexaeder der drei- und sechsgliedrigen Systeme treten hier der Bedeutung und Wichtigkeit nach die Endkantenzonen des Zwei- und Einflächners; sie sind gepaart, rechts und links. So ist das erste sich einsetzende Glied aus dieser Zone dasjenige, welches zugleich in die Diagonalzone der hintern schiefen Endfläche gehört, die gleiche Neigung mit der vordern gegen die Axe hat, die Rhomboidfläche $|a : \frac{1}{2}b : c|$, deren Ort auf dem Schema 1(2). Diese Rhomboidflächen rufen ein neues Paar von Endkantenzonen hervor, in denen die Glieder —3 und 1(4) liegen, jenes zugleich in die vertikale Zone fallend, die hintere, untere schiefe Endfläche $|-\frac{1}{3}a : c : \infty b|$, diese in die Diagonalzone der vordern schiefen Endfläche gehörend, die Diagonalflächen $|a : \frac{1}{4}b : c|$. Durch die Diagonalflächen wird das dritte Paar Endkantenzonen bestimmt, wodurch in der Diagonalzone von der hintern schiefen Endfläche das Glied $|-a : \frac{1}{6}b : c|$, und in der Diagonalzone der hintern untern schiefen Endfläche das Glied $|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{8}b : c|$ bestimmt wird. Zugleich in die vertikale Zone fallend und in jede dieser zwei Endkantenzonen gehörend, ist das Glied $|\frac{1}{5}a : c : \infty b|$. Durch die zweiten Kantenzonen wird die Sphäre der ersten Kantenzonen erweitert, und die dritten geben beiden einen größern Wirkungskreis, wo sie thätig einwirken können. So setzt der Conflikt der Diagonalzone der hintern untern schiefen Endfläche, (die von dem zweiten Paare Endkantenzonen bestimmt wurde),

---

hinlänglich klar, und bedarf keiner weitern Erörterung, wenn man bedenkt, daß die Kante irgend zweier Flächen senkrecht steht auf der Zonenlinie, die die Orte beider Flächen verbindet, und man also zu der Gestalt einer Fläche in dieser Zeichnung gelangt, indem man nach den sie umgebenden Flächenorten Linien zieht, und auf diesen senkrechte Linien errichtet, deren Begrenzung unter einander die verlangte Gestalt der Fläche in dieser Art Zeichnungen bestimmt.

mit dem ersten Paare Endkantenzonen die Fläche $|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c|$ ein, und der Conflikt des ersten Paares mit dem dritten Paare die Fläche $|\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c|$. Das vom dritten Paare hervorgerufene Glied $|\frac{1}{5}a : c : \infty b|$ bestimmt durch seine Diagonalzone in dem zweiten Paare das Glied $|\frac{1}{5}a : \frac{1}{8}b : c|$. Endlich tritt ein viertes Paar von Endkantenzonen auf, bestimmt durch $|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{8}b : c|$, wodurch in der Diagonalzone der vordern schiefen Endfläche das Glied $|a : \frac{1}{12}b : c|$, die untere Diagonalfläche, bestimmt wird.

Wenige von den bis jetzt beobachteten Gliedern bleiben nur noch, die in dieser Abtheilung von Zonen, in den Endkantenzonen des Zwei- und Einflächners, nicht ihre Bestimmung haben, und diese finden sie darin, daß eine zweite Säule ein analoges Hendyoeder bildet, und analoge Endkantenzonen entwickelt. Nämlich ein Zonenpaar zwischen der Rhomboidfläche rechts und der Diagonalfläche links, und der Rhomboidfläche links und der Diagonalfläche rechts führt in der horizontalen Zone auf die Flächen der zweiten Säule $|a : \frac{1}{3}b : \infty c|$, und das genannte Zonenpaar sind Endkantenzonen dieser zweiten Säule, welche die obere hintere schiefe Endfläche $|-3a : c : \infty b|$ bestimmen. Dasselbe Zonenpaar bestimmt im Conflikt mit dem ersten Paare von Endkantenzonen der ersten Säule die Fläche $|b : c : \infty a|$.

Ein zweites Paar Endkantenzonen der zweiten Säule von $|-a : \frac{1}{2}b : c|$ über $|-\frac{1}{3}a : -\frac{1}{4}b : c|$ und von $|-a : -\frac{1}{2}b : c|$ über $|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c|$ bestimmt die Fläche $|-\frac{1}{5}a : \frac{1}{3}c : \infty b|$.

Uebersehen wir die nach ihrem Zusammenhange deducirten Glieder noch einmal, und fügen die gerade Abstumpfung der Seitenkanten des Hendyoeders hinzu, so sind es folgende:

$|a : b : \infty c|$	T	$|a : \frac{1}{3}b : \infty c|$	z	$|a : \infty b : \infty c|$	k
$|\infty a : b : \infty c|$	M	$|a : c : \infty b|$	P	$|-a : c : \infty b|$	x

$\left|-a : \tfrac{1}{2}b : c\right|$ o $\quad \left|a : \tfrac{1}{4}b : c\right|$ n $\quad \left|-a : \tfrac{1}{6}b : c\right|$ s

$\left|a : \tfrac{1}{12}b : c\right|$ i $\quad \left|-a : \tfrac{1}{3}c : \infty b\right|$ q $\quad \left|-\tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{3}c : \infty b\right|$ r.

$\left|-\tfrac{1}{3}a : c : \infty b\right|$ y $\quad \left|-\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{4}b : c\right|$ u $\quad \left|-\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{8}b : c\right|$ v

$\left|\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{2}b : c\right|$ m $\quad \left|\tfrac{1}{5}a : \infty b : c\right|$ t $\quad \left|\tfrac{1}{5}a : \tfrac{1}{8}b : c\right|$ d

$\left|\infty a : b : c\right|$ g.

Die Wichtigkeit dieser Endkantenzonen und ihre bedeutungsvolle Rolle, die sie in dem Entwickelungsgange der zwei- und eingliedrigen Systeme haben, muß um so mehr hervorgehoben werden, da sie die Eigenthümlichkeit der Entwickelung dieser Systeme im Gegensatz gegen die zwei- uud zweigliedrigen Systeme bezeichnen, und wir können nicht umhin, hier der Arbeit des Professor Mohs in Freiberg zu gedenken, da das, was in der zweiteh Auflage seiner Characteristik des naturhistorischen Mineralsystems von der Entwickelung der zwei- und eingliedrigen Systeme gesagt ist, offenbar auf der irrigen Meinung beruht, als trete hier bloß das Verschwinden der Hälfte gleichartiger Flächen von einem zwei- uud zweigliedrigen Systeme ein, zu vergleichen der Weise, wie im regulären Systeme die tetraedrische und pyritoedrische Abtheilung entsteht, und trete nicht zugleich mit der Verschiedenheit von Vorne und Hinten im ganzen Gange der Ausbildung eine ganz bestimmte Eigenthümlichkeit auf.

Da wir das dem Herrn Professor Mohs Eigenthümliche in Sache und Zeichen in der erwähnten Arbeit in unserer Sprache kurz wiederzugeben vermögen, so thun wir es, um das Gesagte aus dem Zusammenhang der Mohs'schen Darstellung zu erweisen *). Es werden in den dreigliedrigen und viergliedrigen

*) Um dem Vorwurf zu begegnen, daß wir einseitig aus dieser Arbeit des Prof. Mohs hervorheben, und uns darüber ein Urtheil erlauben, was der Verfasser wohl nicht für das Wesentliche derselben will gelten lassen, nämlich seine Bezeichnungsmethode und die derselben zu Grunde liegenden Vorstellungen, und das nicht erwähnen,

Systemen unterschieden die Glieder der Hauptreihe, die Glieder aus den Endkantenzonen dieser Hauptreihe, und die geraden Abstumpfungen der Endkante derselben. 1) Da der allgemeine Ausdruck des nten Gliedes der Hauptreihe in den viergliedrigen Systemen ist:

$$\boxed{a : a : 2^{\pm\frac{n}{2}}c} \quad \text{oder} \quad \boxed{s : s : 2^{\pm\frac{n}{2}}c},$$

je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl, d. h. je nachdem

---

worin doch offenbar das vorzüglichste Verdienst der Arbeit muß gesucht werden, und wovon der Verfasser sagt: „daß dadurch möglich geworden sei, mit einem Worte eine fast gränzenlose Mannigfaltigkeit von Gestalten auszudrücken" u. s. w., und wofür er als Beweis der Richtigkeit erwähnt, die Uebereinstimmung mit Dr. Brewster's merkwürdigen optischen Untersuchungen, welche dieser berühmte Naturforscher in den Schriften der Wernerschen Gesellschaft in Edinburg nachgewiesen hat (S. Gilb. An. 9. H. 1821.), — damit man uns nicht verwerfe, wir ignorirten absichtlich dieses wesentliche Resultat der Krystallographie des Prof. Mohs, so können wir nicht umhin, unsere Verwunderung darüber auszusprechen, daß das, was schon seit Jahren offenkundig in der Dissertation des Prof. Weiß, De indagando etc. und in den Schriften der Berliner Academie da liegt, die natürlichen Abtheilungen der Krystallsysteme, als Resultat von Untersuchungen, die der Krystallographie eine bedeutungsvolle Stelle in der Reihe der Naturwissenschaften gewonnen haben, Untersuchungen und Resultate, die dem Herrn Prof. Mohs nicht unbekannt sein konnten, und nicht unbekannt sein durften — daß er das als seine Entdeckung aufstellt. — Obgleich ich wohl weiß, daß Vieles, wenn seine Zeit gekommen ist, von Verschiedenen und an verschiedenen Orten gefunden und erkannt wird, zu gleicher Zeit und ohne Mittheilung, — so zwingt mich doch das Ignoriren der Arbeiten des Prof. W. von Seiten des Prof. M., auch da noch, als Gelehrte außerhalb, weniger bekannt mit dem, was von deutschen Gelehrten in der Wissenschaft gefördert ist, ihm das Verdienst zuschreiben, ja das selbsteigene Anerkennen des Zeugnisses fremder Gelehrten, — an eine Absichtlichkeit des Prof. M. hierbei zu glauben, und dies bestimmte Urtheil auszusprechen, — und muß mich rechtfertigen bei denen, die glauben möchten, daß mir noch kein Recht zustände, über einen Mann in der Art zu sprechen, dessen wohlerworbene Verdienste in vielen Beziehungen anerkannt und hochgeschätzt sind.

das Octaeder erster oder zweiter Ordnung ist, und das n te Glied also durch eine bloße Vervielfachung von c unterschieden ist, nämlich $2^{\pm\frac{n}{2}}c$, so bezeichnet Herr Prof. M. dieses Glied durch (P ± n).

Ebenso ist der Ausdruck des nten Gliedes der Hauptreihe in den dreigliedrigen Systemen

$$\boxed{\frac{(-2)^{\pm n}c}{a \;:\; a}}$$

wonach, je nachdem der Coefficient von c eine positive oder negative Vervielfachung ist, das bezeichnete Rhomboeder zur ersten oder zweiten Ordnung gehört; und daher ist das Mohs'sche Zeichen R ± n.

2) Die Glieder aus den Endkantenzonen dieser Hauptreihe werden dadurch bezeichnet, daß angegeben wird die Vervielfachung des Cosinus bei gleichem Sinus für ihre Neigung in dieser Endkantenzone, in Vergleich mit den Flächen des Gliedes, aus dessen Endkantenzone das zu bezeichnende Glied ist, und diese Vervielfachung wird in der Form eines Exponenten über das Zeichen des Gliedes der Hauptreihe gesetzt, so daß $(P \pm n)^m$ das Glied bezeichnet, das aus der Endkantenzone von P ± n einen m fachen Cosinus bei gleichem Sinus in Vergleich mit P ± n für die Neigung in der Endkantenzone von P ± n hat; — es sind Vier- und Vierkantner, wie durch $(R \pm n)^m$ auf dieselbe Weise die Drei- und Dreikantner bezeichnet werden. Daher

$$(P \pm n)^m = \boxed{a : ma : m2^{\pm\frac{n}{2}}c}$$

$$\text{oder} = \boxed{s : ms : m2^{\pm\frac{n}{2}}c}$$, je nachdem der Vier- u. Vierktr. a. d. Kantz. eines Octaeders 1ster oder 2ter Ordnung ist

$$(R \pm n)^m = \boxed{\frac{\frac{1}{4}(-2)^{\pm n}c}{\frac{1}{3m-1}s : \frac{1}{3m+1}s}}.$$

3) Die geraden Abstumpfungen der Endkanten der Vier- und Vierkantner in dem einen Falle, der Drei- und Dreikantner im andern, jene zweierlei Octaeder erzeugend, diese zweierlei Rhomboeder; letztere sind:

$$\left[\frac{3m+1}{4}(-2)^{\pm n}c \atop s : 2s\right] \text{ und } \left[\frac{3m-1}{4}(-2)^{\pm n}c \atop s : 2s\right],$$

denen die Zeichen $\frac{3m+1}{4} R \pm n$ und $\frac{3m-1}{4} R \pm n$ entsprechen, wie den analogen Ausdrücken der auf diese Weise entstehenden Octaeder die Zeichen $\frac{m+1}{2} P \pm n$ und $\frac{m}{\sqrt{2}} P \pm n$ entsprechen.

Außerdem wird in der dreigliedrigen Abtheilung noch das Glied ausgezeichnet, das, aus der Terminalkantenzone, die Mitte bildet zwischen der ersten und zweiten Unterabtheilung, das Glied, wo in den zweierlei Endkanten des Drei- und Dreikantners gleiche Neigung statt findet:

$$\left[\frac{2}{3}(-2)^{\pm n} c \atop s : s\right] = P \pm n.$$

Das sechsgliedrige System betrachtet Hr. Prof. M. überall als ein dirhomboedrisches, wie dies Hr. Prof W. früher in seiner Dissertation De Ind. form. cryst. auch that *).

Wir

*) Es war ein wesentlicher Vorwurf der Hauyschen Bezeichnungsart, nicht, daß sie alle sich entwickelnden Glieder auf die Kanten und Ecken überhaupt bezog, sondern, daß sie alle auf die Kanten und Ecken ein und derselben Gestalt, der Primitivform, bezog. Doch that sie das auch nur bei ihrem ersten Erscheinen, und später gab Hauy immer die Beziehungen einer Gestalt auf die Kanten oder Ecken eines Gliedes, auf welches sie die nächste Beziehung hatte, an. Das war ein wesentlicher Fortschritt. Hr. Prof. Mohs hat dieses gleichfalls erkannt, und der wesentlichste Unterschied von der Hauyschen Bezeichnungsart ist, daß er nicht die Bestimmung einer Gestalt an einer Primitivform, sondern an den verschiedenen Gliedern der Hauptreihe giebt. — Wir müssen aber fragen: ist die alleinige Beziehung der abgeleiteten

Wir wenden uns jetzt zu den zwei- und zweigliedrigen Systemen, um das nachzuweisen, was wir oben behaupteten, da die Glieder, deren hier als im Gange der Entwickelung sich einsetzenden gedacht wird, zur Hälfte auch die in den zwei- und eingliedrigen Systemen auftretenden sein sollen. Die Hauptreihe besteht aus zweierlei Octaedern, aus zwei- und zweikantigen und zwei- und zweiflächigen:

$$\boxed{a : b : 2^{\pm n} c} = P \pm n$$

$$\boxed{a : \infty b : 2^{\pm n} c} = \bar{P}r \pm n$$

$$\boxed{\infty a : b : 2^{\pm n} c} = \breve{P}r \pm n.$$

Die Glieder aus den Kantenzonen dieser Hauptreihe werden wie vorher durch die Angabe der Vervielfachung der Kantennormale bei gleicher Eckenaxe bezeichnet, d. h. die Fläche wird gedacht durch die Lateralecke gelegt, und es wird angegeben das Viel-

---

Glieder auf die Kanten die naturgemäße? denn im Allgemeinen erkennen wir eine naturgemäße Beziehung auf die Kanten an. Sind die Beziehungen auf die Endkanten der Hauptreihe, der Reihe der Drei- und Dreikantner, oder Vier- und Vierkantner, und der Nebenreihen (die geraden Abstumpfungen der Endkanten von jenen) die einzigen, die in der Natur gegründet sind, oder fordert diese nicht auch andere? Wir werden sehen, daß das m des Hrn. Prof. M. erst durch die Anwendung des Zonengesetzes, des obersten Gesetzes aller Krystallentwickelung für die Erscheinung, seine Bedeutung erhält, und daß durch das Zonengesetz jedesmal wenigstens zwei Werthe für m gefordert werden, daß die Gestalt $(P + m)^m$ jedesmal wenigstens zwei Beziehungen nothwendig erfordert, sie also auch nothwendig wenigstens zweierlei Zeichen haben müßte. Eine Willkühr wird aber auch, wenn man sich der beiden Zeichen bediente, doch bleiben, weil viele andre Beziehungen, die die zu bezeichnende Fläche auf andere Stellen als die genannten Endkanten hat, und die nichts desto weniger das Bestimmende derselben sein können, gar nicht in das Zeichen aufgenommen sind. Jede naturgemäße äußere Bezeichnung einer Fläche fordert eine große Mannigfaltigkeit, weil die Fläche in jeder Richtung mit den übrigen in Verbindung und Zusammenhang steht.

fache der Normale der Kante (aus deren Zone sie ist), das von ihr abgeschnitten wird. Die Glieder aus den Kantenzonen der zwei- und zweikantigen Octaeder zerfallen in zwei Abtheilungen, je nachdem sie aus der Zone der stumpfen oder scharfen Endkante sind:

$$\boxed{ma : b : m2^{\pm n} c} = (\breve{P} \pm n)^m$$

$$\boxed{a : mb : m2^{\pm n} c} = (\bar{P} \pm n)^m .$$

Die Glieder aus den Kantenzonen der zwei- und zweiflächigen Octaeder theilen sich wiederum, je nachdem sie über die Abstumpfung der scharfen oder stumpfen Endkante des ihnen zugehörigen zwei- und zweikantigen Octaeders liegen:

$$\boxed{\frac{2}{m+1} a : \frac{2}{m-1} b : 2^{\pm n} c} = (\bar{P}r \pm n)^m$$

$$\boxed{\frac{2}{m-1} a : \frac{2}{m+1} b : 2^{\pm n} c} = (\breve{P}r \pm n)^m .$$

Endlich werden Glieder aus den Terminalkantenzonen der ebengenannten Octaeder und der Lateralkantenzone des Grundoctaeders unterschieden:

$$\boxed{a : b : \frac{m+1}{2} 2^{\pm n} c} = \frac{m+1}{2} P \pm n.$$

Von den Werthen des m wird gesagt, die gewöhnlichsten durch die Beobachtung bis jetzt gegebenen seien, 3, 4, 5, doch seien diese nicht die einzigen in der Natur vorkommenden, und im Allgemeinen lasse sich von dem m nur sagen, daß es eine rationale Zahl sein müsse. Ich weiß nicht, ob die Absicht des Hrn. Prof. Mohs es nicht erforderte, die Bedeutung dieser Werthe von m nachzuweisen; hier für uns ist es aber nothwendig, darauf einzugehen. Durch die angegebenen Werthe von m werden Glieder bezeichnet, die ihre Bestimmung erhalten dadurch, daß Richtungen, die in verschiedenen Gliedern der Hauptreihe getrennt sind, in ihnen vereinigt werden, die bestimmt

werden durch Zonen, die in den Gliedern der Hauptreihe aufgetreten sind. Werden von irgend einem zwei- und zweikantigen Gliede der Hauptreihe die Flächen aus dessen Kantenzone hervorgehoben, die zugleich in Kantenzonen von andern Gliedern der Hauptreihe liegen, so sind dies folgende: 1) die Flächen, die zugleich in der Kantenzone des zugehörigen zwei- und zweiflächigen Octaeders von $\boxed{a : b : 2^n c}$ liegen, sind $\boxed{a : \frac{1}{2}b : 2^n c}$ und $\boxed{\frac{1}{2}a : b : 2^n c}$.

2) Die Flächen, die zugleich in der Kantenzone des ersten schärfern zwei- und zweikantigen Octaeders*) liegen, sind mit den genannten identisch; so daß diese Flächen $\boxed{a : \frac{1}{2}b : 2^n c}$ und $\boxed{\frac{1}{2}a : b : 2^n c}$ eine Beziehung auf dreierlei Endkanten von Gliedern der Hauptreihe haben, und daher in der Mohs'schen Bezeichnungsart dreierlei Zeichen erlauben, nämlich in Beziehung auf die Endkante von $\boxed{a : b : 2^n c}$ $(\breve{P} + n)^2$, und $(\bar{P} + n)^2$ in Beziehung auf das zugehörige zwei- und zweiflächige Octaeder $(\breve{Pr} + n)^3$ und $(\bar{Pr} + n)^3$, und in Beziehung auf das erste schärfere zwei- und zweikantige $[\breve{P} + (n + 1)]^{\frac{1}{2}}$ und $[\bar{P} + (n + 1)]^{\frac{1}{2}}$ **).

3) Die Flächen $\boxed{a : \frac{1}{3}b : 2^n c}$ und $\boxed{\frac{1}{3}a : b : 2^n c}$ aus den Kantenzonen von $\boxed{a : b : 2^n c}$ sind in ihnen dadurch bestimmt,

---

*) Es werden hier, in den zwei- und zweigliedrigen Systemen, bekanntlich die Glieder in jeder der zwei Abtheilungen der Hauptreihe, der zwei- und zweiflächigen Abtheilung und der zwei- und zweikantigen Abtheilung für sich gezählt, so daß z. B. das erste schärfere zwei- und zweikantige Glied eigentlich das zweite schärfere Glied der Hauptreihe ist, weil zwischen ihm und dem Grundkörper das erste schärfere zwei- und zweiflächige Glied liegt.

**) Die allgemeine Bestimmung für m, die Hr. Prof. Mohs giebt, daß es größer als 1 sein müsse, ist offenbar der Natur völlig fremd, — und sie sowohl als z. B. die Nichtangabe des Werthes $m = 2$ soll offenbar nur dienen, die Methode der Bezeichnung vor der Willkührlichkeit zu schützen, die nothwendig in ihr liegt.

daß sie zugleich in den Kantenzonen vom ersten schärfern zwei- und zweiflächigen Octaeder liegen, und in den Kantenzonen vom zweiten schärfern zwei- und zweiflächigen; ihre Zeichen in Beziehung auf die Endkanten von $\boxed{a : b : 2^n c}$ sind $(\breve{P} + n)^3$ und $(\bar{P} + n)^3$. (In Beziehung auf die zwei genannten zwei- und zweiflächigen Octaeder werden ihre Zeichen sein $(P\breve{r} + n + 1)^2$, $(\bar{P}r + n + 1)^2$, und $(\breve{P}r + n + 2)^{\frac{1}{2}}$ $(\bar{P}r + n + 2)^{\frac{1}{2}}$.

4) Die Glieder aus der Kantenzone von $\boxed{a : b : 2^n c}$, die zugleich in die Kantenzonen vom zweiten schärfern zwei- und zweikantigen Octaeder fallen, sind $\boxed{\frac{1}{4}a : b : 2^n c}$ und $\boxed{a : \frac{1}{4}b : 2^n c}$ deren Zeichen in Beziehung auf $\boxed{a : b : 2^n c}$ sind

$$(\breve{P} + n)^4, \ (\bar{P} + n)^4.$$

5) Die Glieder aus dieser Kantenzone, die zugleich in den Kantenzonen des zweiten schärfern zwei- und zweiflächigen Octaeders liegen, $\boxed{a : \frac{1}{5}b : 2^n c}$, $\boxed{\frac{1}{5}a : b : 2^n c}$ haben die Zeichen $(\breve{P} + n)^5$ und $(\bar{P} + n)^5$ u. s. w. So haben wir in diesen deducirten Gliedern, deren Zeichen in Beziehung auf $(P + n)^1$ wären $(P + n)^2$, $(P + n)^3$, $(P + n)^4$, $(P + n)^5$, für m die Werthe 1, 2, 3, 4, 5, und aus der Fig. 44. (wo durch die Linie ab und wb' die betrachteten Endkantenzonen von $\boxed{a : b : 2^n c}$ vorgestellt sind, und wo die diesen Linien beigeschriebenen Zahlen 1, 2, 3, u. s. w. die Werthe von m sind, die den Flächen entsprechen, deren Orte durch die Zahlen bezeichnet sind), wird man sich leicht Rechenschaft geben können, wie beim weitern Verfolg der Glieder, die in dieser Kantenzone bestimmt werden, theils durch die Kantenzonen der Hauptreihe, theils durch die Kantenzonen der auf diese Weise schon abgeleiteten Glieder, die Reihe der Werthe für m, wie die natürliche Zahlenreihe fortgesetzt wird, so daß $(P + n)^6$, $(P + n)^7$ u. s. w. weiter in dieser Kantenzone auftreten.

In derselben Figur stellt a d die Kantenzone des n ten zwei- und zweiflächigen Gliedes der Hauptreihe vor, und die Zahlen, die die auf eine ganz analoge Weise bestimmten Flächenorte in dieser Zonenlinie bezeichnen, sind die Werthe von m, die den Flächen angehören, die den bezeichneten Orten entsprechen, so daß wir auch hier in dieser Endkantenzone für die Glieder, die theils durch die Endkantenzonen der verschiedenen Glieder der Hauptreihe, theils durch die Endkantenzonen der in dieser Zone schon bestimmten Glieder bedingt werden, haben $(Pr+n)^1$, $(Pr+n)^2$, $(Pr+n)^3$, $(Pr+n)^4$, $(Pr+n)^5$ u. s. w., gleichfalls die Reihe der natürlichen Zahlen.

Endlich die Nebenreihe der Octaeder aus der vertikalen Zone betreffend, sehen wir, daß es diejenigen Glieder sind, welche die Kanten abstumpfen, die die Flächen $\boxed{\frac{1}{m}a : b : 2^n c}$ und $\boxed{a : \frac{1}{m}b : 2^n c}$ unter einander bilden (d. i. die Kante, welche Hr. Mohs die Combinationskante von $(\check{P}+n)^m$ und $(\bar{P}+n)^m$ nennt); und für welche Glieder die der Zonenlinie c f beigeschriebenen Zahlen die Vervielfachungen des Sinus bei gleichem Cosinus für ihre Neigungen in der Lateralkante anzeigen, 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{7}{2}$ u. s. w.; diese Glieder wurden durch $\frac{m+1}{2}P+n$ bezeichnet *).

---

*) Daß die Werthe von dem Mohsschen m so unmittelbar von unserm Schema abzulesen sind, wie die den Zonenlinien beigeschriebenen Zahlen erweisen, davon wird man sich leicht überzeugen können. Die Hälfte des Theils der Kantenzonenlinie, welcher zwischen den Flächenorten des Octaeders eingeschlossen ist, ist das Maaß, womit die Entfernung eines Flächenortes von der Mitte der Zonenlinie gemessen wird, und diese Entfernung ist der Werth von m, der der zu dem Flächenorte gehörigen Fläche entspricht. Für die Glieder aus den Kantenzonen der zwei- und zweikantigen Octaeder und für die Glieder aus den vertikalen Zonen ist dies schon für sich klar, da die

Wir können nun keinesweges geneigt sein, zu glauben, daß diese Reihen von Gliedern, die durch die natürliche Zahlenreihe

---

angegebene Länge der Zonenlinie der Einheit des Cosinus bei gleichem Sinus für die Neigung in diesen Zonen entspricht. In Betreff der Glieder aus den Kantenzonen eines zwei- und zweiflächigen Octaeders, aus der Zone der Kante der Flächen $\boxed{a : 2^n c : \infty b}$ und $\boxed{b : 2^n c : \infty a}$ dürfen wir nur bedenken, daß die Fläche, die zugleich in die Diagonalzone von $\boxed{\frac{1}{m} b : 2^n c : \infty a}$ fällt, diejenige ist, der bei gleicher Eckenaxe eine $(2m + 1)$fache Vervielfachung der Normale der Kante von $\boxed{b : 2^n c : \infty a}$ und $\boxed{a : 2^n c : \infty b}$ entspricht, und daß dem Orte dieser Fläche auf dem Schema dieselbe Entfernung $2m + 1$ von der Mitte der Zonenlinie zukömmt.

Hierdurch sind wir im Stande, sowohl unmittelbar die Mohs'schen Zeichen aus unserm Schema abzulesen, als auch für die in den Mohs'schen Zeichen gegebenen Flächen unmittelbar die Orte in unserm Schema aufzuzeichnen. Es sei z. B. die Fläche $(\breve{P} + n)^m$ gegeben, und es seien p, q, r, s die Flächenorte des nten zwei- und zweikantigen Gliedes der Hauptreihe (deren Orte durch die in- und umschriebenen Rhomben und Rechtecke auf dem Schema bestimmt werden, wie aus der Figur hinlänglich erhellt), so müssen wir auf der Zonenlinie der stumpfen Endkante $at = m.aq$ machen, damit t der Flächenort von $(\breve{P} + n)^m$ sei. Wäre das Zeichen $(\bar{P} + n)^m$, so müßte dasselbe in Beziehung auf die Zonenlinie der scharfen Endkante geschehen.

Ist das Zeichen $(\bar{Pr} + n)^m$ gegeben, so ist t'', der Ort der bezeichneten Fläche, dadurch bestimmt, daß die Länge xt'' der Kantenzonenlinie von $(\bar{Pr} + n)$ und $(\breve{Pr} + n)$ gleich $m.xv$ ist, und zwar in ihrer Verlängerung über $(\bar{Pr} + n)$, wie auf der Verlängerung derselben Zonenlinie über $(\breve{Pr} + n)$ die Länge $yt' = m.yu$ den Flächenort t' für $(\breve{Pr} + n)^m$ bestimmt.

Umgekehrt ist für die Flächenorte im Schema leicht das Mohs'sche Zeichen zu lesen. — Da durch jeden Punkt die vier verschiedenen Zonenlinien können gezogen werden, so kann das Zeichen auch jedesmal eine vierfache Form haben, jedesmal kann die Fläche durch die 4 Formen $\left(\frac{1}{p}\bar{P}+n\right)^m \left(\frac{1}{p'}\breve{P}+n'\right)^{m'} \left(\frac{1}{p''}\bar{P}+n''\right)^{m''} \left(\frac{1}{p'''}\breve{Pr}+n'''\right)^{m'''}$ bezeichnet werden. Herr Prof. Mohs sichert sich zum Theil gegen die Willkühr in der Wahl eines dieser vier verschiedenen Zeichen dadurch,

bestimmt werden, übereinstimmen mit der Entwickelungsreihe des Systems, sondern wir wissen sehr wohl, daß das Ineinandergreifen der Beziehungen, wie dessen Wiederschein in den Zonen sich offenbart, viel verwickelter, inniger und vielseitiger ist, aber das Resultat können wir aus dieser Betrachtung ziehen, daß alle, und namentlich die vom Hrn. Prof. Mohs ausgezeichneten Glieder, hervorgerufen und bedingt sind durch die Hauptreihe der Octaeder. Ich sage hervorgerufen und bedingt, denn in der Erscheinung der Krystallgestalten offenbart sich der Zusammenhang der Glieder als das Produkt des Conflikts sich kreuzender Richtungen; diese sich kreuzenden Richtungen sind früher, sie sind in diesem Sinne der Grund des Gliedes, welches sie in sich aufnimmt, in sich vereint; ihr Durchkreuzungspunkt ist der Knoten, worin der neue Zweig wurzelt. Die Hauptreihe ist das Bestimmende, der Grund aller andern Glieder, der Stamm, an dessen Knoten die andern Glieder wie Zweige sich einsetzen, und zwar so, daß die Zweige wiederum Zweige treiben. — Bis zu diesem Punkte glaubten wir die Darstellung des Hrn. Mohs führen zu müssen, (und wir denken dies ganz in seinem Sinne gethan zu haben), um von hier aus schliessen zu können, wo also der Stamm fällt, fallen auch die Glieder, wenn es nicht etwa Schmarotzer sind, die von der Fülle seines Inhalts wohl noch eine Zeitlang ihr Leben fristen.

Wo aber ist in den Systemen der zwei- und eingliedrigen Abtheilung die Hauptreihe der Octaeder? Das Fehlen derselben ist der Grundzug der Eigenthümlichkeit der Entwickelung derselben. Eine Deduction der Glieder aus dieser Hauptreihe, und

---

daß er die Werthe von n, m und p nur in der von uns entwickelten Bedeutung nimmt, nur solche Werthe zugiebt, die aus dem Conflikt der Zonen der Hauptreihe und der von ihnen bestimmten Glieder sich ergeben, aber nur zum Theil, indem wir gesehen haben, bei der Deduction der Glieder aus der Endkante des zwei- und zweikantigen Octaeders, daß die Unbestimmtheit bei vielen Gliedern dadurch keinesweges gehoben ist.

eine auf diese gegründete Bezeichnung derselben ist also das der Natur dieser Abtheilungen fremdeste, ist eine Künstlichkeit in der Methode, die dem Naturgemäßen am entferntesten ist.

Man entschuldige diese Ausführlichkeit, wir hielten das Resultat derselben für wichtig, da gerade diese Abtheilung von Systemen, die länger in größerer Dunkelheit lag, wie die übrigen Abtheilungen, mit einer Klarheit und Sicherheit in dem Gange ihrer Entwickelung festgestellt ist, daß wenig zu wünschen übrig bleibt, und die Darstellung des Hrn. Mohs, dieses nicht erkennend, den eigenthümlichen Character dieser Systeme gänzlich zerstörte.

Die Möglichkeit, jedes Glied in dieser Bezeichnung des Hrn. Mohs zu bestimmen, kann leicht ganz allgemein nachgewiesen werden *), und bei dem innern Reichthum von Beziehungen wird auch meist das Zeichen noch einfach genug werden; aber alles kömmt darauf an, ob die im Zeichen gegebene Beziehung der Fläche diejenige ist, die in der Natur ihr entspricht, ob der durch die Zeichen angegebene Zusammenhang der in der Natur ist. Wenn wir, um bei dem für diese Bezeichnungsart günstigsten Falle stehen zu bleiben, bei dem, wo die vordere und hintere Fläche in dem Verhältniß mathematischer Gleichheit stehen, beim Feldspathsystem, um die in ihm beobachteten Glieder in den Mohs'schen Zeichen anzugeben, uns ein Octaeder construiren, indem wir die den Rhomboidflächen der hintern Seite entsprechenden vordern Flächen supponieren: so liegen die Flächen $\left|-a : \frac{1}{6}b : c\right|$ $\left|a : \frac{1}{4}b : c\right|$ und $\left|\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c\right|$ in den Kantenzonen dieses Octaeders, und ihre Zeichen sind — $(\breve{P})^3$, $(+\breve{P})^2$, $(\bar{P})^3$. Wenn aber die Deduction des Gliedes $(P)^3$ im zwei- und zweigliedrigen Systeme erfordert, es anzusehen als bestimmt durch den Conflikt der Kantenzone des Grundoctaeders mit der Kantenzone des ersten oder zweiten schärfern zwei- und zweiflächigen Octaeders, so fragen wir hier billig, wodurch ist

*) In der vorigen Note sahen wir, daß ganz allgemein jeder Fläche vier verschiedene Zeichen entsprechen.

dieses Glied hier bestimmt, wo die Glieder der Hauptreihe auf das Bestimmteste im Gange der Entwickelung ausgeschlossen sind, und mit ihnen die Kantenzonen derselben fortfallen? — offenbar durch Zonen, die einem zwei- und zweigliedrigen Systeme in der Art, wie sie hier erscheinen, völlig fremde sind; denn sowohl die dritte Kantenzone unsers Zwei- und Einflächners, als die Zone nach der zweiten Säule über die hintere untere Fläche ist im zwei- und zweigliedrigen Systeme erst möglich, nachdem mehrere Glieder der Hauptreihe aufgetreten sind. Was von diesen an das supponirte Octaeder zunächst sich anschließenden Flächen gilt, gilt mit noch mehreren Gründen von den übrigen Flächen. Um z. B. den Zeichen der Flächen $\left|\frac{1}{5}a : c : \infty b\right|$ $\left|\frac{1}{5}a : \frac{1}{8}b : c\right|$ $5.\overline{Pr}$, $(\overline{Pr})^9$ eine Bedeutung zu geben, müßte etwa erst die Fläche $(\overline{P})^5$ supponirt werden, und für das Zeichen $(\overline{P})^5$ etwa das zweite schärfere zwei- und zweiflächige Octaeder der Hauptreihe, wodurch $(\overline{P})^5$ als das Glied mit 5fachem Cosinus bei gleichem Sinus aus der Kantenzone von P in dieser Kantenzone bestimmt würde. — Ueberhaupt sind ja offenbar die Kantenzonenlinien bc, cd, ab, ad in Fig. 45., wodurch diese und die übrigen Flächen ihr einfachstes Mohs'sches Zeichen erhalten, nur in der innern Fülle der Beziehungen der Glieder in jeder Richtung gegründet, und bezeichnen nichts weniger als den Gang der Entwickelung.

Die Mohs'schen Zeichen für die übrigen Glieder sind aus der Fig. 45. zu ersehen.

Wer vertraut ist mit dem Gange krystallinischer Entwickelung, dem wird es durch das Gesagte hinlänglich klar sein, wie wir uns auf das Bestimmteste gegen die Ansicht erklären müssen, worin die Mohs'sche Darstellung und Bezeichnung der zwei- und eingliedrigen Systeme beruht, daß sie nur die Gestalten der zwei- und zweigliedrigen Systeme, deren Flächen zur Hälfte verschwunden sind, enthalten. Folgende Betrachtung wird aber auch dem, dem die krystallinischen Gestaltungen in ihrem

innern Zusammenhange minder klar in der Anschauung liegen, weiter keine Wahl lassen, ob diese vom Prof. Mohs ergriffene Analogie mit den zwei- und zweigliedrigen Systemen, erzwungen durch Suppositionen Schritt für Schritt von Gliedern, welche fehlen und im Gange der Entwickelung fehlen müssen, in der Natur dieser Abtheilungen gegründet ist, oder ob ihr entspricht die Eigenthümlichkeit des Zusammenhanges, wie wir ihn oben durch die Kantenzonen des Hendyoeders ausgesprochen haben, wo kein Glied supponirt wird, wo alles in so innigem Zusammenhange steht, daß wir sagen könnten, daß bis auf einen gewissen Punkt der Entwickelung kein zwischen liegendes Glied der Beobachtung entgangen ist, daß wir mit Gewißheit den weitern Gang der Entwickelung vorconstruiren könnten.

Nehmen wir die Betrachtung jener Kantenzonen noch einmal unter einer andern Form auf. Wir construiren uns aus der vordern schiefen Endfläche und den hintern Rhomboidflächen eine zwei- und einflächige Pyramide, die sich von einem Rhomboeder dadurch unterscheidet, daß sie nicht dreiflächige und dreikantige Endecken, sondern zwei- und einflächige und zwei- und einkantige Endecken hat; die Endkanten sind: eine zweiseitige und zwei ein- und einseitige, (die Seitenkanten müssen in zwei zweiseitige und vier einseitige unterschieden werden); die drei Enddiagonalen sind auch zweierlei, eine zweiseitige und zwei ein- und einseitige Diagonalen.

Diese zwei- und einflächige Pyramide erleidet im Gange der Ausbildung des Feldspathsystems eine Entwickelung, die ganz analog mit der Entwickelung eines Rhomboeders ist. Es bildet sich zuerst eine Reihe von zwei- und einflächigen Pyramiden, die der Hauptreihe in den rhomboedrischen Systemen entspricht. Die erste schärfere zwei- und einflächige Pyramide entsteht, indem durch je zwei Enddiagonalen Ebenen gelegt werden. Die Fläche $\left|-\frac{1}{3}a : c : \infty b\right|$ geht durch die zwei ein- und einseitigen Enddiagonalen, die Diagonalflächen $\left|a : \frac{1}{4}b : c\right|$ gehen durch die zweiseitige und durch die ein- und einseitigen Diagonalen.

An diesem ersten schärfern Gliede auf dieselbe Weise Ebenen durch je zwei Enddiagonalen gelegt, entsteht das zweite schärfere Glied, es wird gebildet durch die Fläche $|\frac{1}{5}a : c : \infty b|$ (welche durch die zwei einseitigen Diagonalen gelegt ist) und $|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{3}b : c|$ (welche durch die zweiseitige und ein- und einseitige Diagonale geht). Mehr Glieder auf der schärfern Seite der Hauptreihe sind beim Feldspath nicht beobachtet, auf der andern Seite der Hauptreihe, auf der stumpfern, ist das erste stumpfere beobachtet. Die stumpfern Glieder entstehen durch Abstumpfung der Kanten (wie die Bedeutung der schärfern Glieder Abstumpfung der Ecken sein möchte), und zwar so, daß die Abstumpfungsfläche einer Endkante durch die zwei mit ihr parallelen Seitenkanten gelegt ist.

Die Fläche $|-a : c : \infty b|$ stumpft die zweiseitige Endkante unserer zwei- und einflächigen Pyramide ab, und $|b : c : \infty a|$ stumpft die ein- und einseitigen Endkanten derselben ab. Daß übrigens die gepaarten Flächen des ersten stumpfern Gliedes hier gerade aufgesetzt sind auf $|b : \infty a : \infty c|$, hängt von dem Fundamentalverhältniß 1 : 1 der vordern und hintern Seite ab.

Die Abstumpfungen der Lateralkanten, durch die ihnen parallelen Endkanten gelegt, sind die erste Säule $|a : b : \infty c|$ und $|b : \infty a : \infty c|$; die Abstumpfungen der Lateralecken, die durch eine Querdiagonale und die Mitte einer Endkante gehen, sind die zweite Säule $|a : \frac{1}{3}b : \infty c|$ und $|a : \infty b : \infty c|$.

Die Fläche, die der geraden Endfläche des Rhomboeders analog wäre, müßte durch die drei Querdiagonalen gelegt werden; es ist die Fläche $|-3a : c : \infty b|$. Verfolgen wir die bis hieher geführte Analogie unserer zwei- und einflächigen Pyramide mit dem Rhomboeder weiter, so dürfen wir nun, nachdem wir die Glieder der Hauptreihe und die Endglieder des Systems haben kennen gelernt, nach Analoga von Drei- und Dreikantnern

fragen, und zwar werden wir zuerst an das nächste Glied derselben an den metastatischen Körper denken, d. i. an dasjenige, das aus der Kantenzone des Grundkörpers zugleich in der Diagonalzone des ersten schärfern Gliedes liegt. Das Analogon dieses Körpers müßte hier in drei Paare von Flächen zerfallen, und wirklich sind auch alle drei Paare beobachtet worden. Die Flächen $\left|-a : \frac{1}{6}b : c\right|$ sind aus der Zone der zweiseitigen Kanten des Grundkörpers, und liegen in der Zone der einseitigen Diagonale des ersten schärfern Gliedes; $\left|-\frac{1}{7}a : \frac{1}{4}b : c\right|$ sind aus der ein- und einseitigen Kantenzone des Grundkörpers und liegen zugleich in der zweiseitigen Diagonalzone des ersten schärfern Gliedes, und $\left|\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c\right|$ sind aus der einseitigen Kantenzone des Grundkörpers und zugleich aus der einseitigen Diagonalzone des ersten schärfern Gliedes.

Von den drei Paaren von Flächen, die zusammen das Analogon des metastatischen Körpers vom ersten schärfern Gliede der Hauptreihe bilden würden, sind gleichfalls zwei Paare schon beobachtet; sie liegen in der Kantenzone des ersten schärfern Gliedes, und zugleich in der Diagonalzone des zweiten schärfern Gliedes; es sind die Flächen $\left|\frac{1}{5}a : \frac{1}{8}b : c\right|$ und $\left|a : \frac{1}{12}b : c\right|$; das Paar aus der einseitigen Kantenzone und zugleich aus der einseitigen Diagonalzone ist noch nicht beobachtet, sein Ausdruck würde sein $\left|-\frac{1}{7}a : \frac{1}{4}b : c\right|$.

Analoga von andern Drei- und Dreikantnern sind im Feldspathsystem noch nicht beobachtet, wenn nicht etwa die noch zweifelhafte Fläche $\left|a : \frac{3}{4}b : c\right|$ darauf hindeutet; sie würde das Analogon des Drei- und Dreikantners sein, der aus der Diagonalzone des Grundkörpers die Mitte bildet zwischen der ersten und zweiten Unterabtheilung, der zugleich zwischen der ersten Säule und der geraden Endfläche liegt.

Endlich dürften wir, so wie jedes Rhomboeder sein Gegenrhomboeder hat, dessen Flächen durch die Endecken und Mit-

ten der Lateralkanten gehen, auch hier nach dem etwanigen Gegenkörper unserer zwei- und einflächigen Pyramide fragen, auch hierin noch die Analogie verfolgend, und überraschend genug tritt die Fläche $\left|-\frac{1}{5}a : \frac{1}{3}c : \infty b\right|$ als die eine Fläche dieses Gegenkörpers uns entgegen, dessen zwei andere nicht beobachtete Flächen sein würden $\left|3a : \frac{1}{2}b : c\right|$.

Hiermit ist der Kreis des Beobachteten geschlossen, und wir können alles, was die Beobachtung kennen gelehrt hat, zusammenfassen, indem wir sagen, es sei beobachtet, außer dem Grundkörper, das erste und zweite schärfere Glied, das erste stumpfere Glied, das Analogon des metastatischen Körpers vom Grundkörper und von demselben Körper für das erste schärfere Glied zwei Paare, und endlich, außer der ersten und zweiten Säule und des Analogons der geraden Endfläche, die eine Fläche des Gegenkörpers.

Wer diese Betrachtung zum erstenmal anstellt, wird gewiß sehr überrascht werden, und doch ist dieser enge und innige, in dieser Analogie mit den rhomboedrischen Systemen so scharf hervortretende, Zusammenhang kein anderer, als der durch die Endkantenzonen des Zwei- und Einflächners oben angegebene. Wäre Herr Prof. Mohs in diese unsere Betrachtung eingegangen, so würde er leicht, dem Princip seiner Bezeichnung getreu, die Glieder auf eine ihrem Zusammenhange entsprechende Weise haben bezeichnen können. Die angegebenen Glieder in Beziehung auf ein Rhomboeder statt der zwei- und einflächigen Pyramide würden den folgende Zeichen haben:

R, $R+1$, $R+2$, $R-1$, $R-\infty$, $R+\infty$, $P+\infty$, $(R)^3$, $(R+1)^3$.

Lassen wir nun das R zerfallen in R und r, r entsprechend dem zwei- und einflächigen Grundkörper, so würden die Glieder der Hauptreihe bezeichnet werden durch:

R, r, $R+1$, $r+1$, $R+2$, $r+2$, $R-1$, $r-1$.

Das Zeichen $(R)^3$ würde in $(Rr)^3$, $(rR)^3$ und $(rr)^3$ zerfallen, worin die zwei zusammenstehenden Buchstaben immer die Flächen bezeichneten, die die Kante bilden, aus deren Zone die zu bezeichnende Fläche ist, und worin der vordere von den zwei Buchstaben (rR) die Fläche bezeichnete, über welcher die zu bezeichnende Fläche liegt, weil die Kante von rR eine ein- und einseitige ist, und die Flächen aus dieser Kantenzone, die über r und über R liegen, verschieden sind.

Eben so zerfällt $(R+1)^3$ in $(rr+1)^3$, $(rR+1)^3$, $(Rr+1)^3$, wovon das Paar $(Rr+1)$ nicht beobachtet ist.

Ob $(R+n)$ Vorne oder Hinten, d. h. auf der Seite, wo $R+0$, oder auf der andern Seite liegt, wird daraus ersehen, ob n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, und davon hängt die Lage der Flächen $(rr+n)^m$, $(rR+n)^m$, $(Rr+n)^m$, ob sie Vorne oder Hinten liegen, ab. — Die Endglieder würden sein $R+\infty$, $r+\infty$, $R-\infty$, $P+\infty$, $p+\infty$, $p'+\infty$. Der Gegenkörper: R', r', wovon aber nur R' beobachtet ist. So würden die beobachteten Glieder diese sein: R, r, $R+1$, $r+1$, $R+2$, $r+2$, $R-1$, $r-1$, $(rr)^3$, $(rR)^3$, $(Rr)^3$, $(rr+1)^3$, $(rR+1)^3$, $R+\infty$, $r+\infty$, $p'+\infty$, $P+\infty$, $R-\infty$, R' *).

*) Wie diese Zeichen aus unserm Schema abzulesen sind, zeigt Fig. 46. Durch die drei Flächenorte des Grundkörpers R, r, r wird ein zwei- und einseitiges, d. h. ein gleichschenkliges Dreieck bestimmt; in der Reihe von in- und umschriebenen Dreiecken, deren Seiten parallel mit denen von Rrr sind, bestimmen die Ecken derselben die Flächenorte der Hauptreihe, so daß im ersten umschriebenen Dreieck die Ecken die Flächenorte von $R+1$, $r+1$, $r+1$, und im ersten inschriebenen Dreieck die Ecken die Flächenorte von $R-1$, $r-1$, $r-1$ sind. Die Seiten dieser Dreiecke sind die Kantenzonenlinien der Glieder, deren Flächenorte in den Ecken liegen, oder die Diagonalzonenlinien der Glieder, deren Orte in den Mitten der Seiten der Dreiecke liegen.

Verlängern wir die Seite des Dreiecks (Rrr) bis sie die Seite des Dreiecks $(Rrr+2)$ in $(Rr)^3$ trifft, so ist die Entfernung dieses Punkts von der Mitte der verlängerten Seite die dreifache Länge der halben Seite des Dreiecks, daher die Drei in dem Zeichen $(Rr)^3$; dasselbe gilt von $(rr)^3$, $(rR)^3$. Wäre die Seite Rr bis zum Durch-

Es kann wohl Niemand im Ernste meinen, daß das, was hier im Systeme des Feldspathes nachgewiesen sei, auch nur für dieses gültig sei, das könnte nur eine Unkunde von besondern und allgemeinen Verhältnissen in der Entwickelung krystallinischer Formen beurkunden. Wenn wir also diese Analogie mit den rhomboedrischen Systemen im Gange der Ausbildung und des Zusammenhanges auch nicht an vielen andern Systemen nachweisen könnten, so hat sie doch so viel Grund in sich selber, daß ihrer Evidenz dadurch nichts abginge, daß wir sogar, wenn wirklich zwei- und eingliedrige Systeme in der Natur von einer solchen Ausbildung vorkommen sollten, wie Herr Mohs bei der Gelegenheit der Entwickelung seiner allgemeinen krystallographischen Formeln in Gilb. An. 1821. das System des Datholit beschreibt, — welches hiernach so ganz den Character eines zwei- und zweigliedrigen Systems hat, — wo aber bei der Seltenheit der Reihen von Krystallen dieses Fossils leicht ein Irrthum möglich sein könnte, — daß wir ganz bestimmt auf eine Unterscheidung solcher Systeme dringen müssen von denen, deren Natur wir im Feldspath, Pistazit, Augit, Gyps, Sphen u. s. w. haben kennen gelernt.

Es wird nicht ohne Interesse sein, auch im System des Pistazit, dessen Deutung und Entwickelung aus seiner verworre-

---

schnittspunkt der Diagonalzonen von $R+2$ in z verlängert, so wäre die Entfernung von $r-1$ bis z das Fünffache von der halben Seite des Dreiecks, daher für z das Zeichen $(Rr)^5$ sein würde. Die Hälften der Seiten der Dreiecke sind die Einheiten für die Entfernung eines Flächenortes in einer Kantenzonenlinie von der Mitte derselben, welche Entfernung in dem Schema durch m in dem Zeichen $(Rr+n)^m$ angegeben wird; an der Krystallgestalt hat aber m dieselbe Bedeutung, die Herr Mohs ihm sonst beilegt. Wie in zwei- und zweigliedrigen Systemen die Mohs'schen Zeichen in dem Schema abgelesen werden, so auch in allen übrigen Systemen, so auch hier in der von uns vorgeschlagenen Bezeichnungsart, was wohl dafür sprechen möchte, daß wir dem Princip der Bezeichnungsmethode des Herrn Mohs treu geblieben sind.

nen räthselhaften Erscheinung, niedergelegt in den Schriften der Berliner Acad. d. Wiss., wir uns zu erfreuen haben, diese Analogie mit den rhomboedrischen Systemen zu verfolgen, die nur das in einer andern Gestalt wiedergiebt, was schon lange als das Wesentlichste im Gange der Ausbildung in den erwähnten Schriften der Berl. Acad. ausgesprochen war. Herr Mohs hat hier die mehr in die Augen fallende Unzulänglichkeit, Naturwidrigkeit seiner Bezeichnungsmethode wohl selbst gefühlt, aber gemeint, durch irgend eine Wendung des Systems dennoch es ihr angemessener stellen zu können, — denn anders können wir uns das Ignoriren dieser ausgezeichneten Arbeit des Hrn. Prof. Weiß nicht erklären, — wenn er in seiner Charakteristik sagt, daß das Grundoctaeder, von welchem ausgegangen werden muß, unbekannt sei.

Außer der Verschiedenheit in den Werthen der Dimensionen haben die Systeme der zwei- und eingliedrigen Abtheilung ihren eigenthümlichen Charakter der weitern Entwickelung in dem Fundamentalverhältnisse der vordern und hintern Seite, (in dem Verhältnisse der Sinusse, bei gleichen Cosinussen für die Neigungen der vordern und hintern schiefen Endfläche), das den Werthen der Dimensionsverhältnisse in den Ausdrücken der übrigen Glieder zu Grunde liegt. Beim Feldspath war dieses Fundamentalverhältniß 1 : 1, hier beim Pistazitsystem ist es 1 : 3. Daß dieses Fundamentalverhältniß immer ein rationales sein muß, ist eine Entdeckung, die allein die Enträthselung dieser in der Erscheinung, so verworrenen Gestalten möglich machte, und hat seinen Grund in dem allgemeinen krystallonomischen Gesetz, daß das irrationale Verhältniß nur verschiedenen Richtungen zukömmt, daß in derselben Richtung, wenn sie getheilt wird, ihre Theile immer in einem rationalen Verhältniß stehen.

Nachdem dieses Fundamentalverhältniß 1 : 3 bestimmt ist, ergiebt sich die Bestimmung der übrigen Glieder aus ihrem Zusammenhang, wie er in Fig. 47. angegeben ist, wo jeder Flächenort durch die zwei Zahlen bezeichnet ist, die das Verhält-

hältniß der Vielfachen von a : b ausdrücken, wenn c keine Vervielfachung erleidet. Die beobachteten Glieder sind:

$\left|a : b : \infty c\right|$ n $\left|a : 2b : \infty c\right|$ e $\left|a : \infty b : \infty c\right|$ r
$\left|b : \infty c : \infty c\right|$ P $\left|a : \frac{1}{4}b : c\right|$ d $\left|-\frac{1}{3}a : c : \infty b\right|$ M
$\left|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c\right|$ h $\left|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{8}b : c\right|$ o $\left|\frac{1}{5}a : c : \infty b\right|$ T
$\left|\frac{1}{5}a : \frac{1}{4}b : c\right|$ u $\left|\frac{1}{5}a : \frac{1}{8}b : c\right|$ z $\left|\frac{1}{9}a : c : \infty b\right|$
$\left|-\frac{1}{11}a : c : \infty b\right|$ s $\left|-\frac{1}{11}a : \frac{1}{8}b : c\right|$ x $\left|\frac{1}{13}a : c : \infty b\right|$ l
$\left|\frac{1}{13}a : \frac{1}{8}b : c\right|$ y $\left|\frac{1}{13}a : \frac{1}{16}b : c\right|$ q *).

Construiren wir uns hier eine zwei- und einflächige Pyramide aus den Flächen $\left|-\frac{1}{3}a : c : \infty b\right|$ und $\left|a : \frac{1}{4}b : c\right|$, so unterscheiden wir in der Hauptreihe die Flächen des ersten schärfern Gliedes $\left|\frac{1}{5}a : c : \infty b\right|$ und $\left|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{8}b : c\right|$, und vom zweiten schärfern Gliede ist die eine Fläche $\left|-\frac{1}{11}a : c : \infty b\right|$ gleichfalls beobachtet, dessen Paar aber, das nicht als beobachtet angegeben ist, würde sein $\left|\frac{1}{5}a : \frac{1}{16}b : c\right|$.

Von stumpfern Gliedern der Reihe ist nichts beobachtet; das erste stumpfere Glied würde von der von Hrn. Weiß supponirten Endfläche $\left|a : c : \infty b\right|$ und den Flächen $\left|-a : \frac{1}{2}b : c\right|$ gebildet werden, ein Umstand, der wohl verdient hervorgehoben zu werden, da durch ihn der Vergleichungspunkt mit dem System des Feldspaths gegeben ist. Dieses Glied, dessen Fundamentalverhältniß der vordern und hintern Seite 1 : 1 ist, das beim Feldspath der Grundkörper war, ist hier zurückgedrängt, und seine Stelle scheint der Wichtigkeit nach das nächste schärfere übernommen zu haben. Aber merkwürdig genug, obgleich dieses Glied verdrängt zu sein scheint, sind doch seine Kantenzonen, und zwar die ein- und einseitigen ausgebildet, nämlich auf der hintern Seite ist das Glied aus ihnen, das zu-

*) Das Verhältniß der Dimensionen ist $a : b : c = \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{1}{4}} : \sqrt{\frac{1}{71}} = 1 : \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{2}{71}}$.

gleich in der Diagonalzone unsers Grundkörpers liegt, und auf der vordern Seite das Glied, das zugleich in der Diagonalzone des ersten schärfern liegt, beobachtet, — jenes $\left|-\frac{1}{3}a:\frac{1}{4}b:c\right|$ ist ein Paar von dem in drei Paare zerfallenen Drei- und Dreikantner, der ein Analogon von dem mit 3 fachem Cosinus aus der Endkante sein würde $(rR-1)^3$, und dieses $\left|\frac{1}{5}a:\frac{1}{4}b:c\right|$ $=(Rr-1)^5$ gehört dem Körper an, der einem Drei- und Dreikantner mit 5 fachem Cosinus entsprechen würde. Dieselben zwei Glieder in Beziehung auf die ein- und einseitigen Kantenzonen des Grundkörpers sind beobachtet $(rR)^3=\left|\frac{1}{5}a:\frac{1}{8}b:c\right|$ und $(Rr)^5=\left|-\frac{1}{11}a:\frac{1}{8}b:c\right|$.

Von dem Analogon des metastatischen Körpers vom ersten schärfern ist gleichfalls ein Paar Flächen beobachtet, nämlich $\left|\frac{1}{13}a:\frac{1}{8}b:c\right|=(Rr+1)^3$; die Abstumpfung der Kante dieses Paars, die Fläche $\left|\frac{1}{13}a:c:\infty b\right|$, ist das Analogon der Abstumpfung der stumpfern Endkante des metastatischen Körpers, welche beim Kalkspath und andern rhomboedrischen Systemen nicht ungewöhnlich ist, und deren Rhomboeder Mohs Nebenreihen nennt; ihr Zeichen würde $\frac{5}{2}R+1$ sein. Die Diagonalzone dieser Fläche bestimmt in der Kantenzone des Grundkörpers ein Glied, ein Paar von Flächen, welche zu einem Drei- und Dreikantner mit 7 fachem Cosinus im rhomboedrischen Systeme gehören würden: $\left|\frac{1}{13}a:\frac{1}{16}b:c\right|=(rR)^7$. Die Fläche $\left|\frac{1}{9}a:c:\infty b\right|$ stumpft die Endkanten des nicht beobachteten Paares $(rR)^5$ ab, ihr Zeichen ist $\frac{7}{4}R+1$.

So finden wir, diese Analogie mit den rhomboedrischen Systemen verfolgend, keine Glieder hier, die nicht gerade die nächsten und gewöhnlichsten dort sind. In Vergleich mit dem System des Feldspathes scheint das vorzüglich als unterscheidend und characteristisch uns entgegen zu treten, daß von den Paaren der Analoga der Drei- und Dreikantner, die dort wirklich alle drei immer beobachtet sind, hier nur einzelne vorzukom-

men scheinen, — was jedoch nur Mangel an hinlänglich umfassender Beobachtung sein könnte. — Das Analogon der geraden Endfläche ist nicht beobachtet, sie würde wie beim Feldspath sein $\left|-3a : c \infty b\right|$. Dagegen scheint eine Fläche, die Hauy angiebt, und deren Ausdruck Herrn Prof. Weiß verdächtig erscheint, ganz in der Analogie zu sein, nämlich die Fläche $\left|-\frac{1}{17}a : \frac{1}{3}c : \infty b\right|$; es ist die eine Fläche des Gegenkörpers des ersten schärfern Gliedes $= R' + 1$, wie beim Feldspath $\left|\frac{1}{5}a : \frac{1}{3}c : \infty b\right|$ das Gegenstück des Grundkörpers war *).

Fragen wir nun aber nach der Bedeutung dieser Analogie, ist sie eine bloße äußere, zufällige, oder ist sie in einer inneren

*) Stellen wir die vorgeschlagenen Zeichen der Flächen nebeneinander, so sind es diese: $R, r, R+1, r+1, R+2, (rR-1)^3, (Rr-1)^5, (rR)^3, (Rr)^5, (rR)^7, (Rr+1)^3, R'+1, R+\infty, P+\infty, p'+\infty, \frac{5}{2}R+1, \frac{7}{4}R+1$. — Wir dürfen bei dieser Gelegenheit wohl aufmerksam machen auf das Verhalten des Eisenvitriol, der bis dahin für rhomboedrisch galt, bis feinere Messungen mit dem Reflexions-Goniometer seine zwei- u. eingliedrige Natur gezeigt haben, indem sie eine Verschiedenheit in den drei Kanten, die bis dahin für gleich galten, fanden. Die Ausbildung ist so analog mit einem rhomboedrischen Systeme, daß es dennoch schwer wird, sich zu überreden, wenn man eine Reihe von Krystallen vor sich hat, daß man kein rhomboedrisches, sondern ein zwei- und eingliedriges System vor sich habe. Die geringe Abweichung von den Verhältnissen eines rhomboedrischen Systems, die man fast nur für eine Perturbation ansprechen möchte, steht offenbar im Zusammenhang mit der Entwickelung dieses Systems, die fast gar keinen Unterschied von der Entwickelung eines rhomboedrischen Systems erkennen läßt, — so daß das, was wir zusammengehörige Paare der zwei- und einflächigen Pyramide nannten, auch wirklich in der Entwickelung hier noch beisammen ist. — Es ist sogar die Möglichkeit, einzusehen, daß es zwei- und eingliedrige Systeme in der Natur geben könnte, die durch Winkelmessungen gar nicht könnten erkannt werden, wo der qualitative Unterschied sich noch nicht quantitativ ausgebildet hätte, wie wir solche Verhältnisse in viergliedrigen Systemen kennen, die qualitativ die zwei- und zweigliedrige Natur haben, wo sich diese aber noch nicht in quantitativer Verschiedenheit der Grundrichtungen ausgesprochen hat, z. B. der Kreuzstein.

wesentlichen Beziehung zwischen diesen zwei Krystallabtheilungen gegründet, so müssen wir allerdings behaupten, sie ist auf eine innere wesentliche Beziehung dieser zwei Krystallabtheilungen gegründet. Der Zusammenhang der Glieder, wie er äußerlich in der Anschauung in beiden auf eine analoge Weise Statt hat, ist innerlich durch ein Gemeinsames begründet, und dieses Gemeinsame kann nur in den durch die Grundkörper gegebenen Richtungen gesucht werden; denn alle spätern Glieder sind nur das Produkt des Conflikts dieser Richtungen; alle weitere Entwickelung hat ihren Grund in ihnen. Da nun in unserm Grundkörper der zwei- u. eingliedrigen Systeme, in der zwei- u. einflächigen Pyramide, eine vollkommene Analogie in den in ihr gegebenen Richtungen mit den Richtungen der dreiflächigen Pyramide (d. i. Rhombdr.) statt findet, so muß auch die Entwickelung der zwei- u. eingliedrigen Systeme ganz analog sein der Entwickelung der rhomboedrischen Systeme. Es ist nur der Unterschied im Gange der Ausbildung beider Abtheilungen möglich, daß in dem zwei- u. eingliedrigen Systeme durch das Vorherrschen von gewissen Flächen und durch das Fehlen oder Zurückgedrängtsein von andern Flächen, die im rhomboedrischen Systeme gleichwerthig nur zugleich sein können, gewisse Richtungen der Ausbildung befördert und bestimmt werden, die durch das Zusammensein derselben weniger hervortreten. Es kömmt also Alles nur darauf an, mit welchem Rechte wir die zwei- und einflächige Pyramide zu dem Körper bestimmten, der den im Systeme liegenden Grundrichtungen entspricht. Wir könnten uns auf die Deduction der Glieder von ihm aus berufen, aber wir müssen auch behaupten, daß der Begriff eines zwei- und eingliedrigen Systems ihn fodere. Wenn nämlich eine Verschiedenheit der vordern und hintern Seite, bei Gleichheit der rechten und linken Seite, statt findet, und diese sich räumlich darstellt, so kann im Allgemeinen dies nur auf eine zweifache Weise geschehen, entweder ist auf der vordern Seite eine Fläche und sind auf der hintern

zwei, oder es sind vorne zwei Flächen, aber verschieden von den zwei Flächen auf der hintern Seite *). —

Der erste Fall, wo eine Fläche auf der einen Seite zweien Flächen auf der andern gegenüber steht, ist der einfachste, ist der, zu dem die Betrachtung des Zusammenhanges der Glieder des Feldspathes uns auf das Bestimmteste führte, ist der, der die Analogie mit den rhomboedrischen Systemen bedingt, und erscheint in der Natur überhaupt der gewöhnlichste zu sein, wie sich aus spätern Untersuchungen über die verschiedenen zwei- und eingliedrigen Systeme ergeben wird. Doch werden auch mehrere derselben zugleich eine Deutung ihres Zusammenhanges erlauben, die die Grundbeziehungen aller Glieder auf ein zwei- und ein- und einkantiges Octaeder zurückführt. Es wird aber hierin keine wesentliche Verschiedenheit in den zwei- und eingliedrigen Systemen beruhen, keine Verschiedenheit in der ursprünglichen Anlage ihrer Entwickelung, indem dieser Unterschied der vordern und hintern Seite, der durch das Gegenüberstehen zweier Flächen auf der einen Seite zweien Flächen auf der andern Seite sich ausspricht, sich immer zurückführen läßt auf den ersten Fall, den einfachsten, und als eine von ihm aus abgeleitete, sich entwickelte Verschiedenheit angesehen werden kann. Die Ausbildung von solchem zwei- und ein- und einkantigen Octaeder wird dieselbe Analogie mit der Entwickelung eines zwei- und zweikantigen Octaeders gewähren, und diese ist auf dieselbe Weise durch die Analogie der in beiderlei Octaeder

*) Das Hendyoeder des Hrn. Weiß kann in diesem Sinne kein Grundkörper sein, weil in ihm nicht die Richtungen gegeben sind, die aller weitern Entwickelung zum Grunde liegen; es fehlt ihm die in einem Grundkörper der zwei- und eingliedrigen Systeme nothwendige Bestimmung des Verhältnisses der vordern und hintern Seite, der Unterschied zwischen vorne und hinten kann sich geometrisch nicht so darstellen, daß vorne eine Fläche und hinten keine sei. Daß es aber wohl seine Bedeutung hat, die Beziehungen der im Gange der Ausbildung sich einsetzenden Glieder auf die Endglieder des Systems, zwischen welchen sie alle liegen, hervorzuheben, wird eine später sich ergebende Betrachtung zeigen.

gegebenen Richtungen innerlich begründet, wie wir dies bei der zwei- und einflächigen und dreiflächigen Pyramide (Rhomboeder) gesehen haben. Wir könnten demnach ohne Gefahr, der Natur nicht zu entsprechen, eine Construction des Ganges der Ausbildung von diesem zwei- und ein- und einkantigen Octaeder aus, durch Combination der Richtungen, in welchen die in den Grundrichtungen des Systems thätigen Verhältnisse in ihrem ersten räumlichen Erscheinen sich offenbaren, durch die Combination der in diesem Octaeder gegebenen Richtungen unternehmen. Wir ziehen es aber vor, diesen Gang der Ausbildung nachzuweisen, indem wir hier vorgreifend uns auf eine Eigenschaft des Feldspathes beziehen, die später näher entwickelt und beleuchtet werden soll. Es ist nämlich bekannt, daß der Feldspath eben so oft in der Stellung gefunden wird, in welcher unsere Diagonalflächen $\boxed{a : \frac{1}{2}b : c}$ als Säulenflächen erscheinen, und die Säulenflächen $\boxed{a : b : \infty c}$ als Endflächen, als in der Stellung, worauf diese Ausdrücke der Flächen sich beziehen.

In Fig. 48.. ist die Projection der Flächenorte des Feldspathsystems auf der Fläche, die senkrecht auf den Diagonalflächen steht, entworfen, sie ist also die Projection auf der geraden Endfläche dieser Stellung. Die Ansicht derselben überzeugt, wie hier, in so weit die Axenrichtung dieser Stellung eine ursprüngliche und keine sekundäre ist, alle weitere Ausbildung ihre bestimmteste Beziehung auf ein zwei- und ein- und einkantiges Octaeder hat, das von den Flächen 00′, T, T′ (es sind die Hauy schen Buchstaben der Flächen) gebildet wird. Die ersten in diesem Octaeder gegebenen Glieder der ferneren Entwickelung sind die Abstumpfungen der Ecken, sind Flächen, die durch die zweiseitigen Endkanten, durch die einseitigen Endkanten und durch die einseitigen Lateralkanten bestimmt sind, M, P, y; — diese drei Flächen bilden ein Hendyoeder, sind der Gegenkörper unsers Grundkörpers, des zwei- und ein- und einkantigen Octaeders. Durch M und P ist die horizontale Zone bestimmt, in ihr liegen die Abstumpfungen der einseitigen Lateralkanten des Grund-

körpers, die Diagonalflächen n. Das erste stumpfere Glied der Hauptreihe, ein zwei- und ein- und einflächiges Octaeder, die Abstumpfungen der Endkanten, wird durch u, u und x und k gebildet, das erste schärfere durch v, v und q und l; vom zweiten schärfern, das wiederum erster Ordnung ist, also ein zwei- und ein- und einkantiges Octaeder, ist das Paar d, d auf der hintern Seite beobachtet, das ihr zugehörige Paar auf der vordern Seite fehlt *). Aus den Endkantenzonen des Grundkörpers sind die Glieder beobachtet, die zugleich in den Kantenzonen des ersten schärfern Gliedes liegen, nämlich aus der vordern zweiseitigen Kantenzone s, s, aus der hintern zweiseitigen Kantenzone z, z, aus den einseitigen Endkantenzonen auf der vordern Seite g, g, auf der hintern Seite m, m. Es bleibt nur noch die Fläche r, welche die vordere Fläche des zweiten stumpf. zwei- u. ein- u. einflächigen Gliedes der Hauptreihe ist. So können wir den Zusammenhang des Beobachteten mit unserm zwei- und ein- und einkantigen Grundkörper kurz so aussprechen: die Endglieder des Systems, d. i. die vierseitige Säule, und deren Kantenabstumpfungen, das Analogon der geraden Endfläche, das erste stumpfere Glied der Hauptreihe, das erste schärfere, und vom zweiten schärfern das hintere Paar, und vom zweiten stumpfern zwei- und ein- und einflächigen Gliede die vordere Fläche, und aus den Endkantenzonen des Grundkörpers die Glieder, die zugleich in den Kantenzonen des ersten schärfern liegen **).

---

*) Es würde die Fläche $\left|-a : \frac{1}{8}b : \frac{1}{3}c\right|$ sein, und ich glaube, daß sie wohl schon beobachtet ist; Herr Prof. Weiß führt als zweifelhaft an die Fläche $\left|-a : \frac{1}{4}b : \frac{1}{3}c\right|$.

**) Die dieser Stellung entsprechenden Ausdrücke der Flächen sind:

y $\left|a : c : \infty b\right|$ u $\left|a : \frac{1}{4}b : c\right|$ v $\left|a : \frac{1}{8}b : c\right|$

k $\left|-\frac{1}{3}a : c : \infty b\right|$ T $\left|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c\right|$ z $\left|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{12}b : c\right|$

r $\left|\frac{1}{3}a : c : \infty b\right|$

So kann in den zwei- und eingliedrigen Systemen allerdings eine Analogie mit den zwei- und zweigliedrigen Systemen in dem Zusammenhange ihrer Glieder hervortreten, die aber eine ganz andere ist als die, welche wir beim Hrn. Prof. Mohs rügen mußten, da sie Richtungen, die nicht in diesen Systemen liegen, supponirt, um an sie die Deduction der Glieder anschließen zu können, und vernachlässigt die Richtungen, die unmittelbar durch den Begriff eines zwei- und eingliedrigen Systems gegeben sind, und auf welche alle Entwickelung desselben ihre Beziehung hat. Die Mohs'schen Zeichen werden ihrem Princip getreu, auch leicht auf dieses zwei- und ein- und einkantige Octaeder angewandt werden können. Nennen wir die Flächen dieses Octaeders P, P, p, p, so werden die Zeichen für die im Feldspathsystem in der betrachteten Stellung der Pavenoer Zwillinge sein: $0 = P$, $T = p$, $x = Pr$, $k = pr$, $u = Ppr$, $q = Pr + 1$, $l = pr + 1$, $v = Ppr + 1$, $r = Pr - 1$, $s = (P)^3$, $z = (p)^3$, $g = (Pp)^3$, $m = (pP)^3$, $y = P - \infty$, $P = Pr + \infty = pr + \infty$, $M = Ppr + \infty$, $n = (P + \infty) = (p + \infty)$.

Schließlich müssen wir uns noch dagegen verwahren, daß diese Grundkörper der zwei- und eingliedrigen Systeme nicht angesehen werden als Haüysche Primitivformen; es ist in ihnen kein Erstes, sondern nur ein Früheres; sie sind nur die räumlichen Darstellungen der thätigen Verhältnisse in den Grundrichtungen des Systems, die über ihnen stehen, die das wahrhaft Erste, Primitive sind, sie sind nur der geometrische Ausdruck, der sein Gesetz in Zahl und Maaß hat. Dieser Gegenstand wird uns in Folgendem näher treten, wo wir unsere Betrachtung auf den Entwickelungsgang der zwei- und eingliedrigen Systeme, in Bezug auf die Grundrichtungen derselben, wenden.

---

x $[\frac{1}{3}a : c : \infty b]$ o $[\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}b : c]$ s $[\frac{1}{3}a : \frac{1}{12}b : c]$

l $[-\frac{1}{7}a : c : \infty b]$ d $[-\frac{1}{7}a : \frac{1}{8}b : c]$

q $[\frac{1}{9}a : c : \infty b]$ m $[-\frac{1}{11}a : \frac{1}{4}b : c]$

g $[\frac{1}{13}a : \frac{1}{4}b : c]$

Das Verhältniß der Grundrichtungen dieser Stellung ist:

$$a : b : c = \sqrt{1} : \sqrt{1} : \sqrt{\tfrac{1}{13}}.$$

Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin, alte Grünstr. Nr. 18.

Berichtigungen.

Seite 3. Zeile 1. 2. 3. lies: $p'n'' - p''n'$, statt: $p'n'' - p'n''$ ꝛc.
— 6. — 3 l. senkrecht auf der, st. auf die.
— 7. — 1 v. u. l. $\frac{mc^2}{a}$, st. $\frac{me^e}{a}$.
— 8. — 2 l. $\frac{1}{n}a$ st. $\frac{1}{m}a$.
— 9. — 9 v. u. l. in den Diagonalzonen, st. in der Diagonalz.
— 9. — 7 v. u. l. ist in dieser Fläche bestimmt, st. ist bestimmt.
— 10. — 7 u. 14 l. $\frac{1}{n}b$ st. $\frac{1}{m}b$.
— 11. — 5 l. (1) st. 1(1).
— 11. — 3 v. u. l. den Flächenort von der geraden Endfläche und von, st. den Flächenort von.
— 13. — 4 l. $\left|\overline{\frac{1}{m}a : \frac{1}{n}a}^{\,c}\right|$ statt $\left|\overline{\frac{1}{m}a : \frac{1}{m}a}^{\,c}\right|$
— 14. — 5 u. 6 l. $\frac{nc}{a}$ st. $\frac{nc'}{a}$.
— 14. — 7 v. u. l. ausgezeichneten, st. punktirten.
— 15. — 4 von u. l. σ, st. α.
— 18. — 13 l. die Diagonallinien und die durch den Mittelpunkt mit den Seiten parallel gezogenen Linien (als Octaederkantenzonen-Linien und Würfelkantenzonen-Linien.)
— 20. — 10 v. u. l. $|a : \frac{1}{4}b : \frac{1}{3}c|$ st. $|a : {}^{1}b : \frac{1}{3}c|$.
— 21. — 3 u. 5 fällt $\sqrt{3}$ weg.
— 23. — 10 v. u. l. unter der Voraussetzung, st. da die Erfahrung sich dahin entschieden hat.
— 25. — 15 l. $\frac{a^2}{M^2}$ st. $\frac{a^2}{n^2}$.
— 30. — 18 l. $\left|\frac{1}{M}a : -\frac{1}{N}b : \infty c\right|$ st. $\left|\frac{1}{m}a : -\frac{1}{n}b : \infty c\right|$

So kann in den zwei- und eingliedrigen Systemen allerdings eine Analogie mit den zwei- und zweigliedrigen Systemen in dem Zusammenhange ihrer Glieder hervortreten, die aber eine ganz andere ist als die, welche wir beim Hrn. Prof. Mohs rügen mußten, da sie Richtungen, die nicht in diesen Systemen liegen, supponirt, um an sie die Deduction der Glieder anschließen zu können, und vernachlässigt die Richtungen, die unmittelbar durch den Begriff eines zwei- und eingliedrigen Systems gegeben sind, und auf welche alle Entwickelung desselben ihre Beziehung hat. Die Mohs'schen Zeichen werden ihrem Princip getreu, auch leicht auf dieses zwei- und ein- und einkantige Octaeder angewandt werden können. Nennen wir die Flächen dieses Octaeders P, P, p, p, so werden die Zeichen für die im Feldspathsystem in der betrachteten Stellung der Pavenoer Zwillinge sein: $0 = P$, $T = p$, $x = Pr$, $k = pr$, $u = Ppr$, $q = Pr + 1$, $l = pr + 1$, $v = Ppr + 1$, $r = Pr - 1$, $s = (P)^3$, $z = (p)^3$, $g = (Pp)^3$, $m = (pP)^3$, $y = P - \infty$, $P = Pr + \infty = pr + \infty$, $M = Ppr + \infty$, $n = (P + \infty) = (p + \infty)$.

Schließlich müssen wir uns noch dagegen verwahren, daß diese Grundkörper der zwei- und eingliedrigen Systeme nicht angesehen werden als Hauysche Primitivformen; es ist in ihnen kein Erstes, sondern nur ein Früheres; sie sind nur die räumlichen Darstellungen der thätigen Verhältnisse in den Grundrichtungen des Systems, die über ihnen stehen, die das wahrhaft Erste, Primitive sind, sie sind nur der geometrische Ausdruck, der sein Gesetz in Zahl und Maaß hat. Dieser Gegenstand wird uns in Folgendem näher treten, wo wir unsere Betrachtung auf den Entwickelungsgang der zwei- und eingliedrigen Systeme, in Bezug auf die Grundrichtungen derselben, wenden.

---

x	$\frac{1}{5}a : c : \infty b$	o	$\frac{1}{5}a : \frac{1}{4}b : c$	s	$\frac{1}{5}a : \frac{1}{12}b : c$
l	$-\frac{1}{7}a : c : \infty b$	d	$-\frac{1}{7}a : \frac{1}{5}b : c$		
q	$\frac{1}{9}a : c : \infty b$	m	$-\frac{1}{11}a : \frac{1}{4}b : c$		
		g	$\frac{1}{13}a : \frac{1}{4}b : c$		

Das Verhältniß der Grundrichtungen dieser Stellung ist:

$$a : b : c = \sqrt{1} : \sqrt{1} : \sqrt{\tfrac{1}{13}}.$$

Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin, alte Grünstr. Nr. 18.



Seite 31. Zeile 14 lies: $\sqrt{18}$, statt: $\sqrt{15}$.

— 35. — 15 l. $\frac{\nu c}{a^{\cdot}}$ st. $\frac{\nu c}{c'}$.

— 36. — 8 v. u. l. sin : cos, st. cos : sin.

— 38. — 7 l. der, st. aller.

— 41. — 3, 5, 6, l. $\sigma, \sigma^{\cdot}$, st. $\alpha, \alpha^{\cdot}$.

— 41. — 11 l. 5, st. s.

— 46. — 7 u. 8 v. u. l. α', β', st. $\alpha^{\cdot}, \beta^{\cdot}$.

— 46. — 5 v. u. schalte vor $\overset{c}{\left|\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a\right|}$ ein $\overset{c}{\left|a : a\right|}$.

— 46. — 3 v. u. schalte vor $\overset{\infty c}{\left|\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a\right|}$ ein $\overset{\infty c}{\left|a : a\right|}$

— 54. — 16 v. u. l. Flächen, st. Ebenen.

— 63. — 11 v. u. l. hb', st. b'.

— 64. — 6. l. — 3, st. 3.

— 92. — 9. v. u. l. des ersten schärfern, st. des ersten und zweiten schärfern.

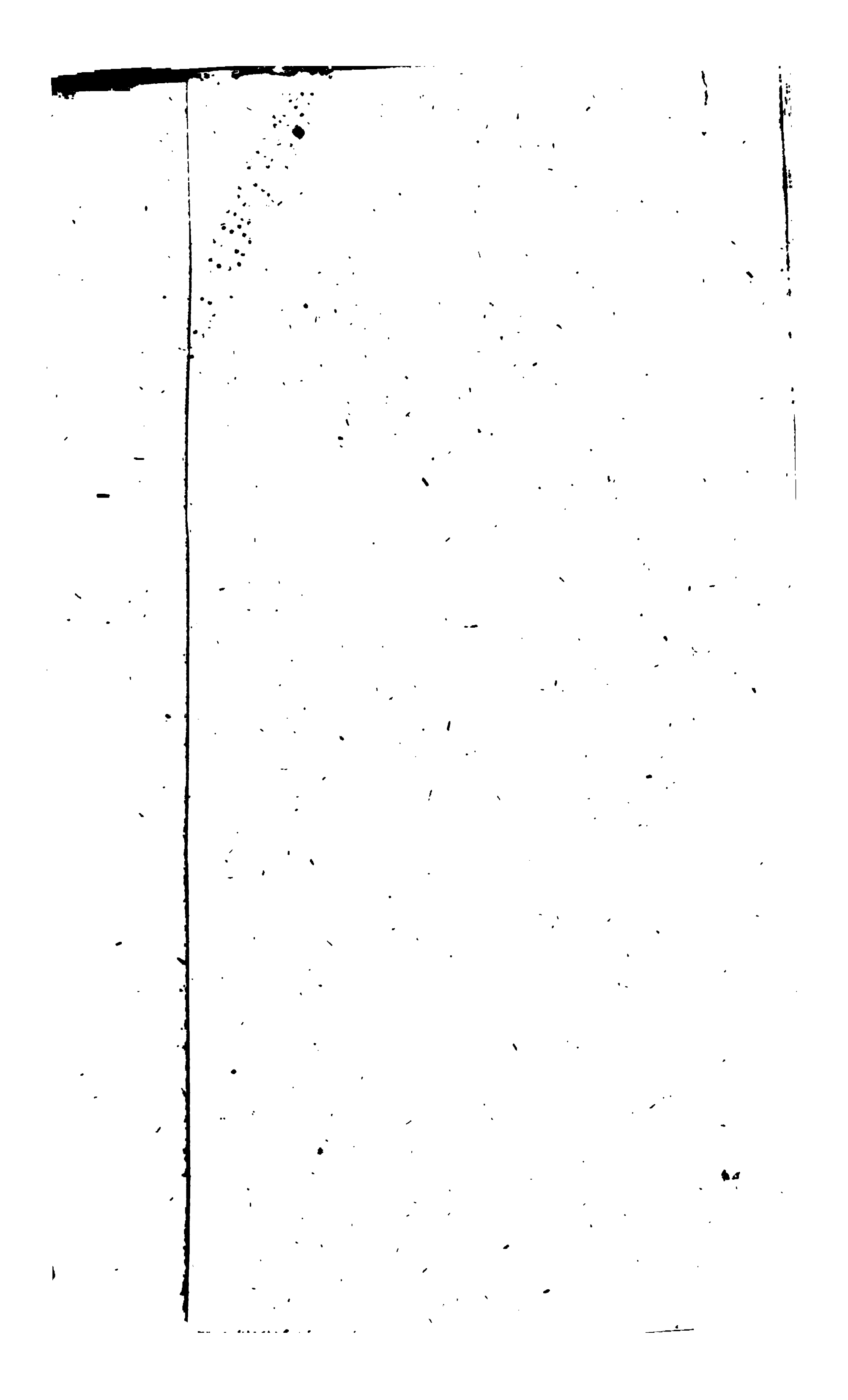
— 96. — 11 in d. Anmerk. l. $\sigma'' \left|-\frac{1}{3}a : \frac{1}{6}b : c\right|$.

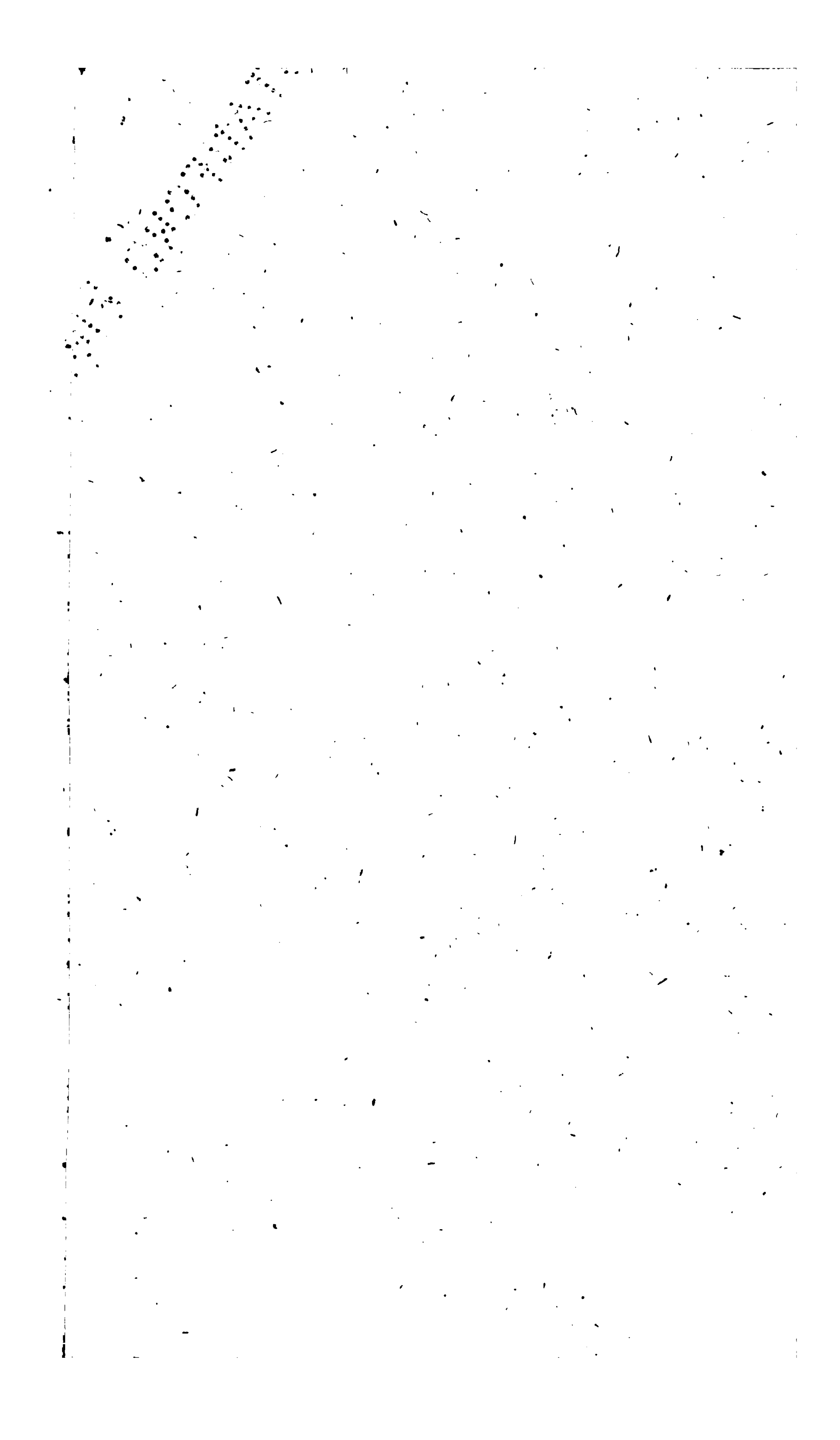
— 97. — 4 v. u. in der Anmerk. l. m, st. mn.

— 100. — 2 l. a st. b und b st. a.

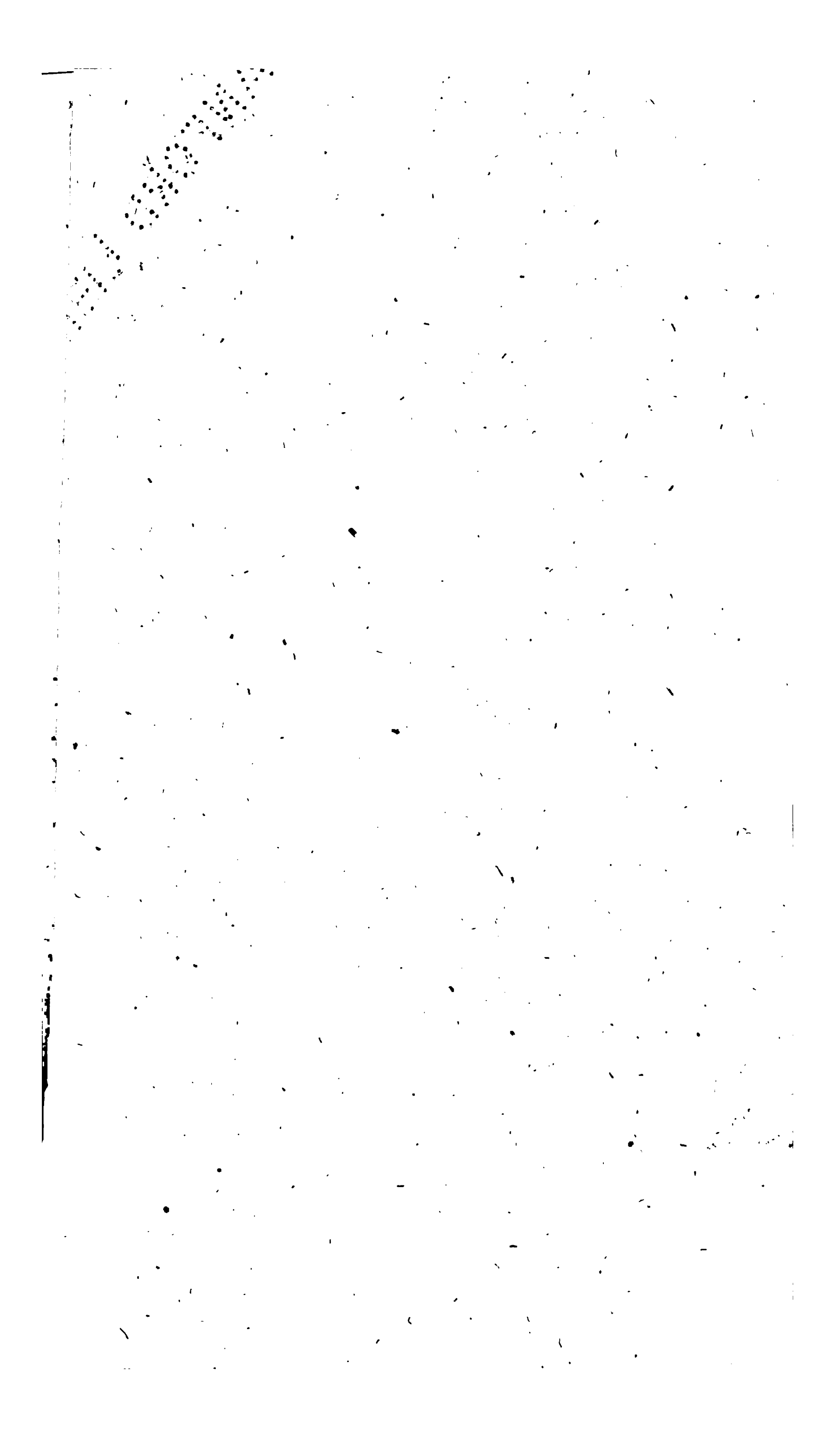
— 114. — *n* v. u. in d. Anmerk. l. 2p(n—p), st. 2mp(n—p).

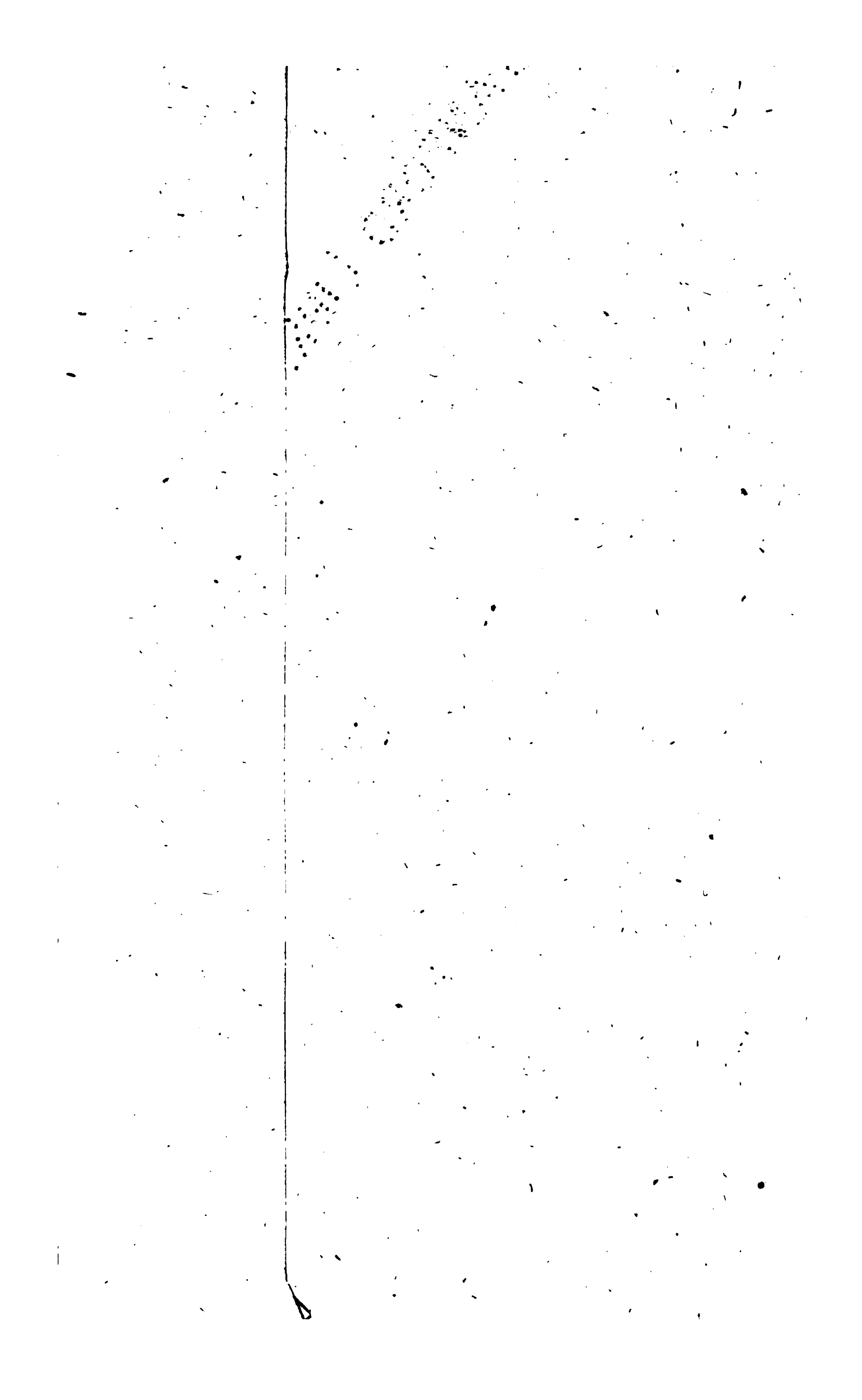
In den Flächenausdrücken muß überall das Kolon vor ∞ gesetzt werden, wo es fehlen sollte.











So kann in den zwei- und eingliedrigen Systemen allerdings eine Analogie mit den zwei- und zweigliedrigen Systemen in dem Zusammenhange ihrer Glieder hervortreten, die aber eine ganz andere ist als die, welche wir beim Hrn. Prof. Mohs rügen mußten, da sie Richtungen, die nicht in diesen Systemen liegen, supponirt, um an sie die Deduction der Glieder anschließen zu können, und vernachlässigt die Richtungen, die unmittelbar durch den Begriff eines zwei- und eingliedrigen Systems gegeben sind, und auf welche alle Entwickelung desselben ihre Beziehung hat. Die Mohs'schen Zeichen werden ihrem Princip getreu, auch leicht auf dieses zwei- und ein- und einkantige Octaeder angewandt werden können. Nennen wir die Flächen dieses Octaeders P, P, p, p, so werden die Zeichen für die im Feldspathsystem in der betrachteten Stellung der Pavenoer Zwillinge sein: $0 = P$, $T = p$, $x = Pr$, $k = pr$, $u = Ppr$, $q = Pr + 1$, $l = pr + 1$, $v = Ppr + 1$, $r = Pr - 1$, $s = (P)^3$, $z = (p)^3$, $g = (Pp)^3$, $m = (pP)^3$, $y = P - \infty$, $P = Pr + \infty = pr + \infty$, $M = Ppr + \infty$, $n = (P + \infty) = (p + \infty)$.

Schließlich müssen wir uns noch dagegen verwahren, daß diese Grundkörper der zwei- und eingliedrigen Systeme nicht angesehen werden als Hauysche Primitivformen; es ist in ihnen kein Erstes, sondern nur ein Früheres; sie sind nur die räumlichen Darstellungen der thätigen Verhältnisse in den Grundrichtungen des Systems, die über ihnen stehen, die das wahrhaft Erste, Primitive sind, sie sind nur der geometrische Ausdruck, der sein Gesetz in Zahl und Maaß hat. Dieser Gegenstand wird uns in Folgendem näher treten, wo wir unsere Betrachtung auf den Entwickelungsgang der zwei- und eingliedrigen Systeme, in Bezug auf die Grundrichtungen derselben, wenden.

---

x $\left|\frac{1}{3}a : c : \infty b\right|$ o $\left|\frac{1}{5}a : \frac{1}{4}b : c\right|$ s $\left|\frac{1}{3}a : \frac{1}{12}b : c\right|$

l $\left|-\frac{1}{7}a : c : \infty b\right|$ d $\left|-\frac{1}{7}a : \frac{1}{8}b : c\right|$

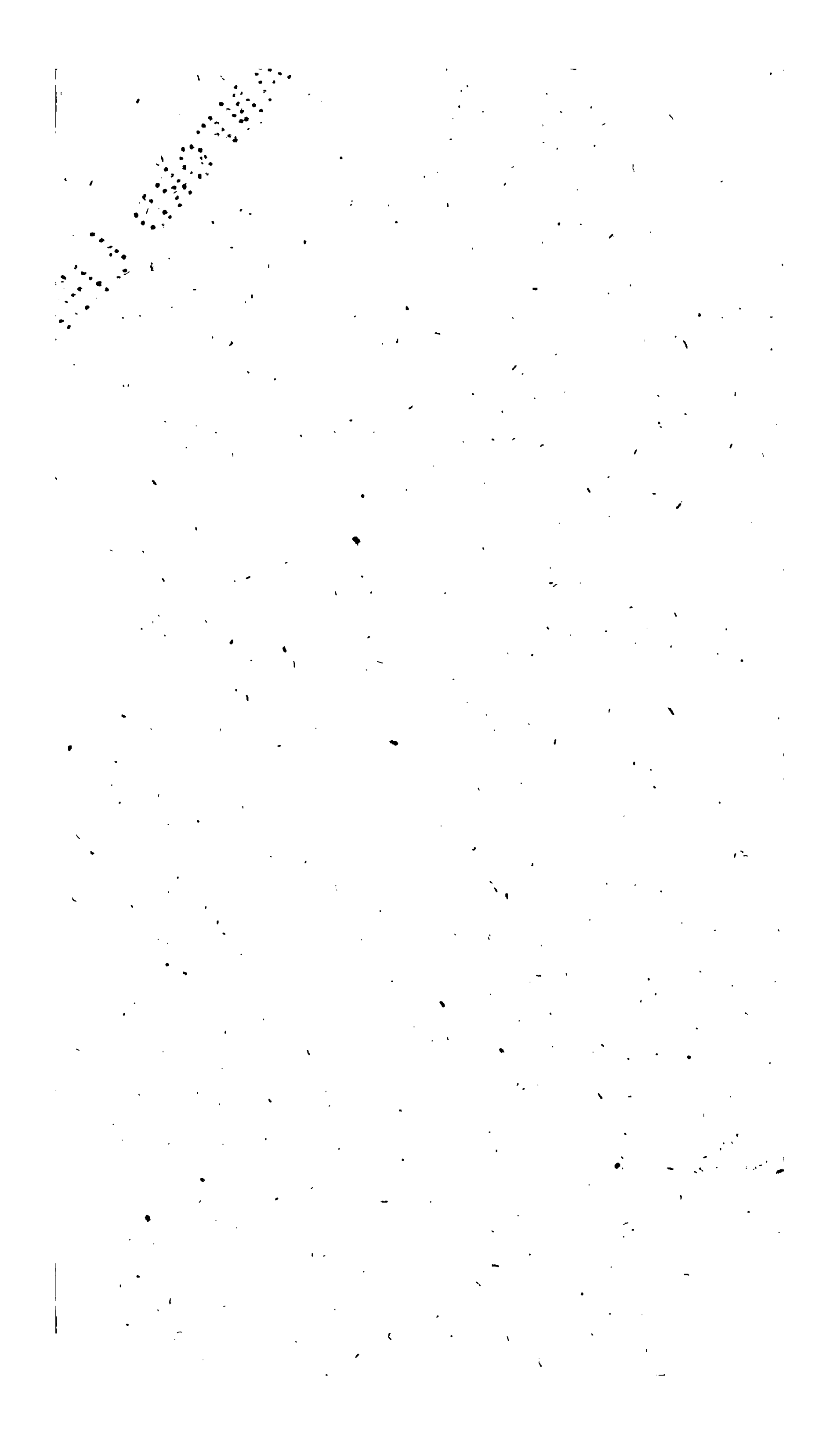
q $\left|\frac{1}{9}a : c : \infty b\right|$ m $\left|-\frac{1}{11}a : \frac{1}{4}b : c\right|$

g $\left|\frac{1}{13}a : \frac{1}{4}b : c\right|$

Das Verhältniß der Grundrichtungen dieser Stellung ist:

$$a : b : c = \sqrt{1} : \sqrt{1} : \sqrt{\tfrac{1}{13}}.$$

Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin, alte Grünstr. Nr. 18.



Seite 31. Zeile 14 lies: $\sqrt{18}$, statt: $\sqrt{15}$.

— 35. — 15 l. $\frac{\nu c}{a^{\cdot}}$ st. $\frac{\nu c}{c'}$.

— 36. — 8 v. u. l. sin : cos, st. cos : sin.

— 38. — 7 l. der, st. aller.

— 41. — 3, 5, 6, l. σ, $\sigma^{\cdot}$, st. α, $\alpha^{\cdot}$.

— 41. — 11 l. 5, st. s.

— 46. — 7 u. 8 v. u. l. α', β', st. $\alpha^{\cdot}$, $\beta^{\cdot}$.

— 46. — 5 v. u. schalte vor $\left|\tfrac{1}{3}a \overset{c}{:} \tfrac{1}{4}a\right|$ ein $\left|a \overset{c}{:} a\right|$.

— 46. — 3 v. u. schalte vor $\left|\tfrac{1}{3}a \overset{\infty c}{:} \tfrac{1}{4}a\right|$ ein $\left|a \overset{\infty c}{:} a\right|$

— 54. — 16 v. u. l. Flächen, st. Ebenen.

— 63. — 11 v. u. l. hb', st. b'.

— 64. — 6. l. — 3, st. 3.

— 92. — 9. v. u. l. des ersten schärfern, st. des ersten und zweiten schärfern.

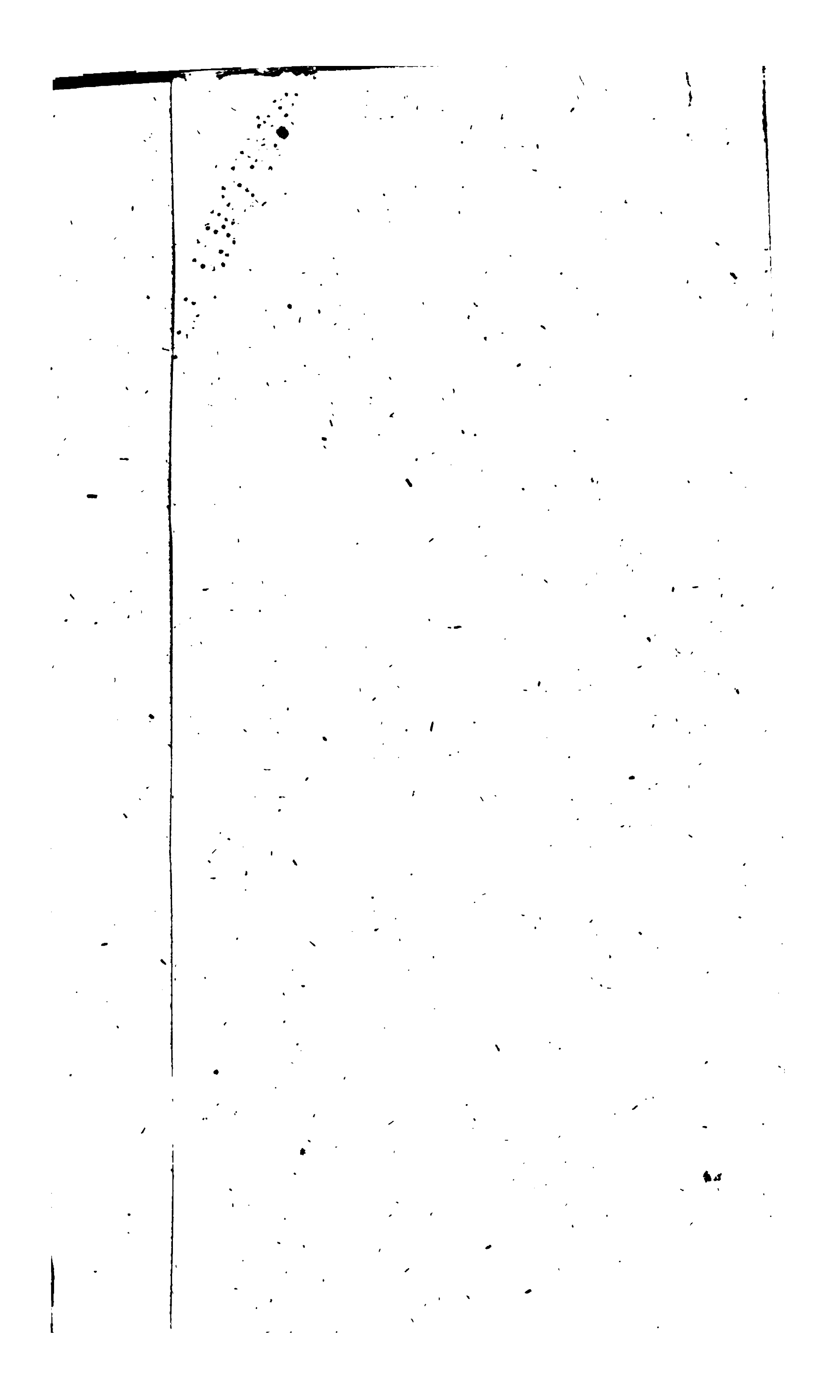
— 96. — 11 in d. Anmerk. l. σ'' $\left|-\tfrac{1}{3}a : \tfrac{1}{6}b : c\right|$.

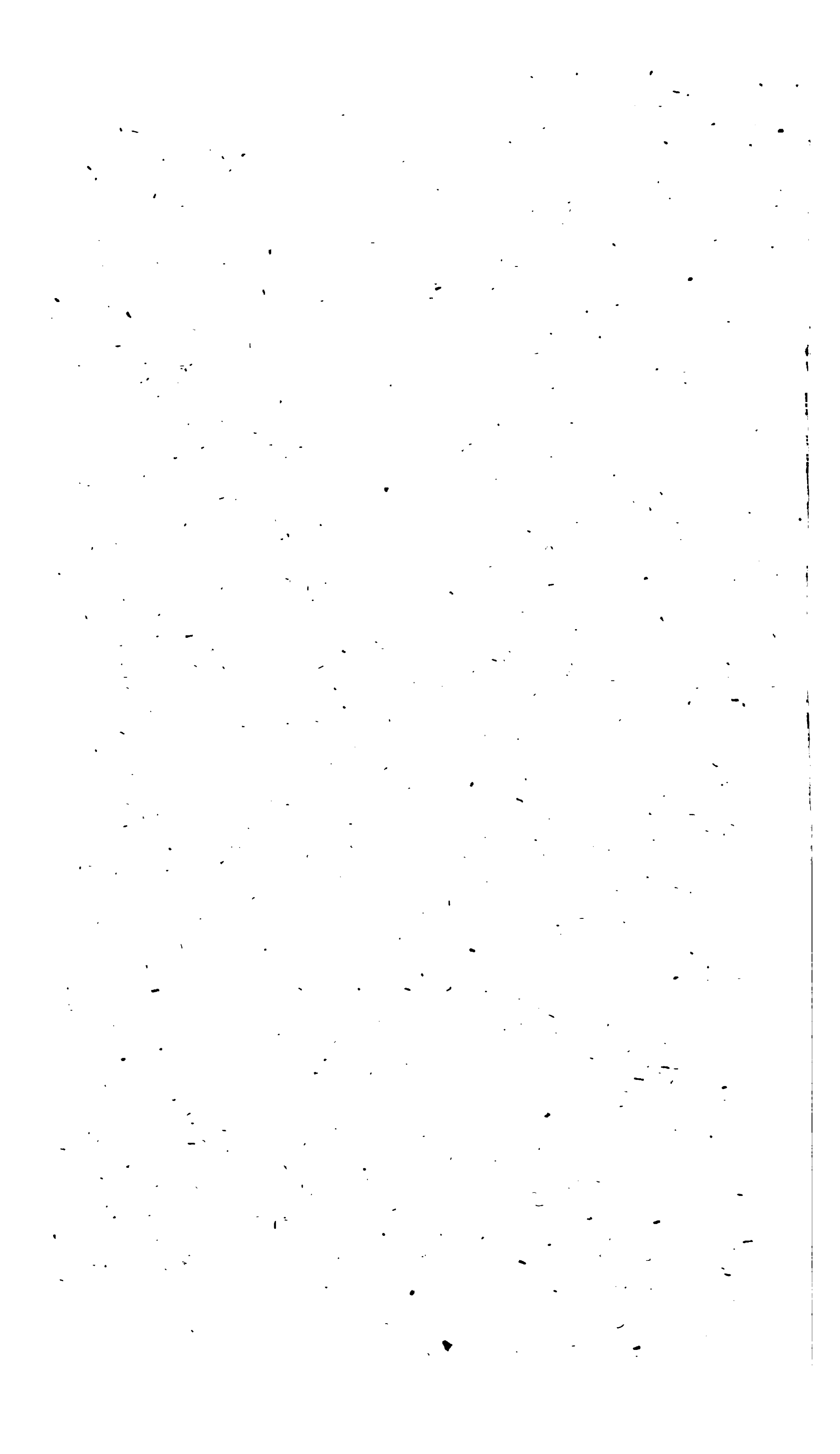
— 97. — 4 v. u. in der Anmerk. l. m, st. mn.

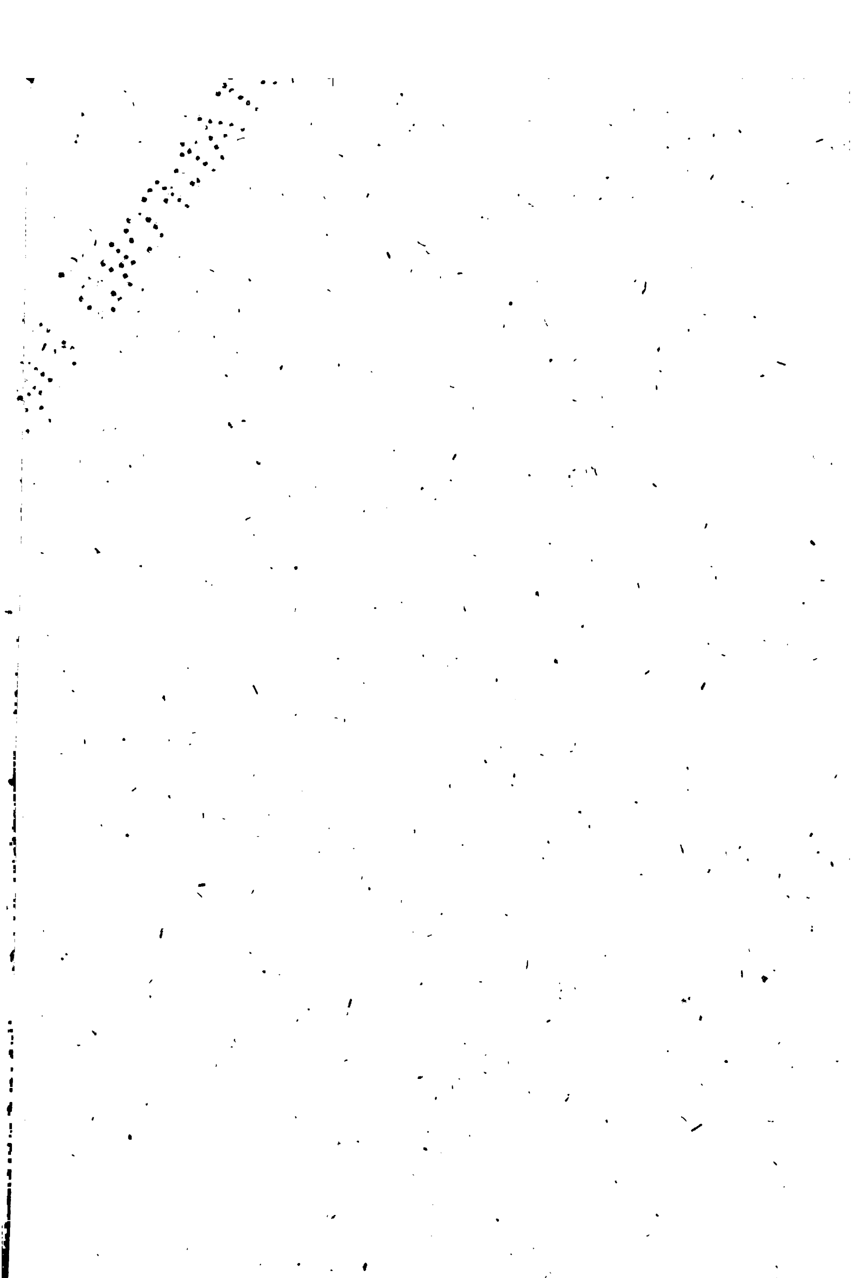
— 100. — 2 l. a st. b und b st. a.

— 114. — n v. u. in d. Anmerk. l. 2p(n—p), st. 2mp(n—p).

In den Flächenausdrücken muß überall das Kolon vor ∞ gesetzt werden, wo es fehlen sollte.



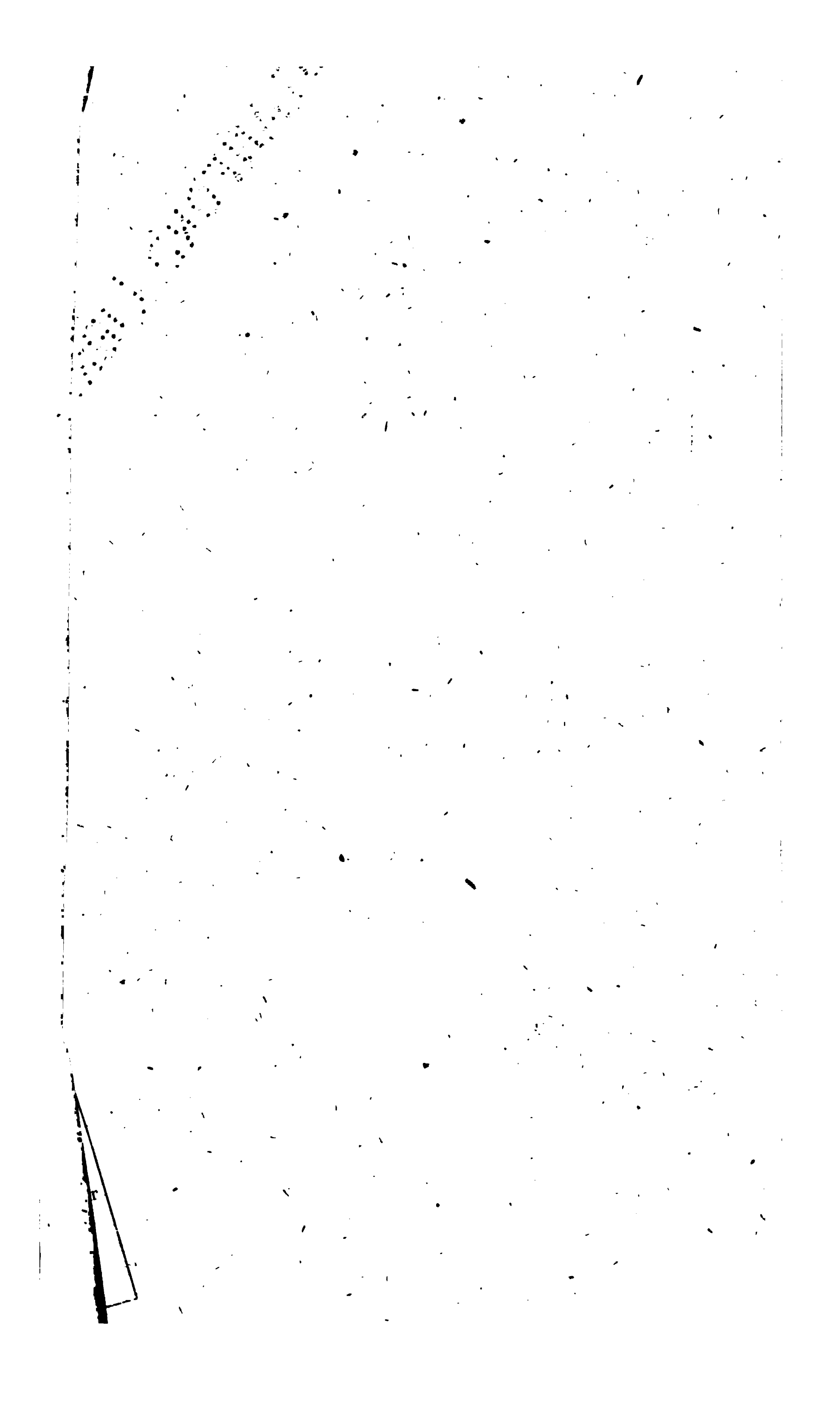


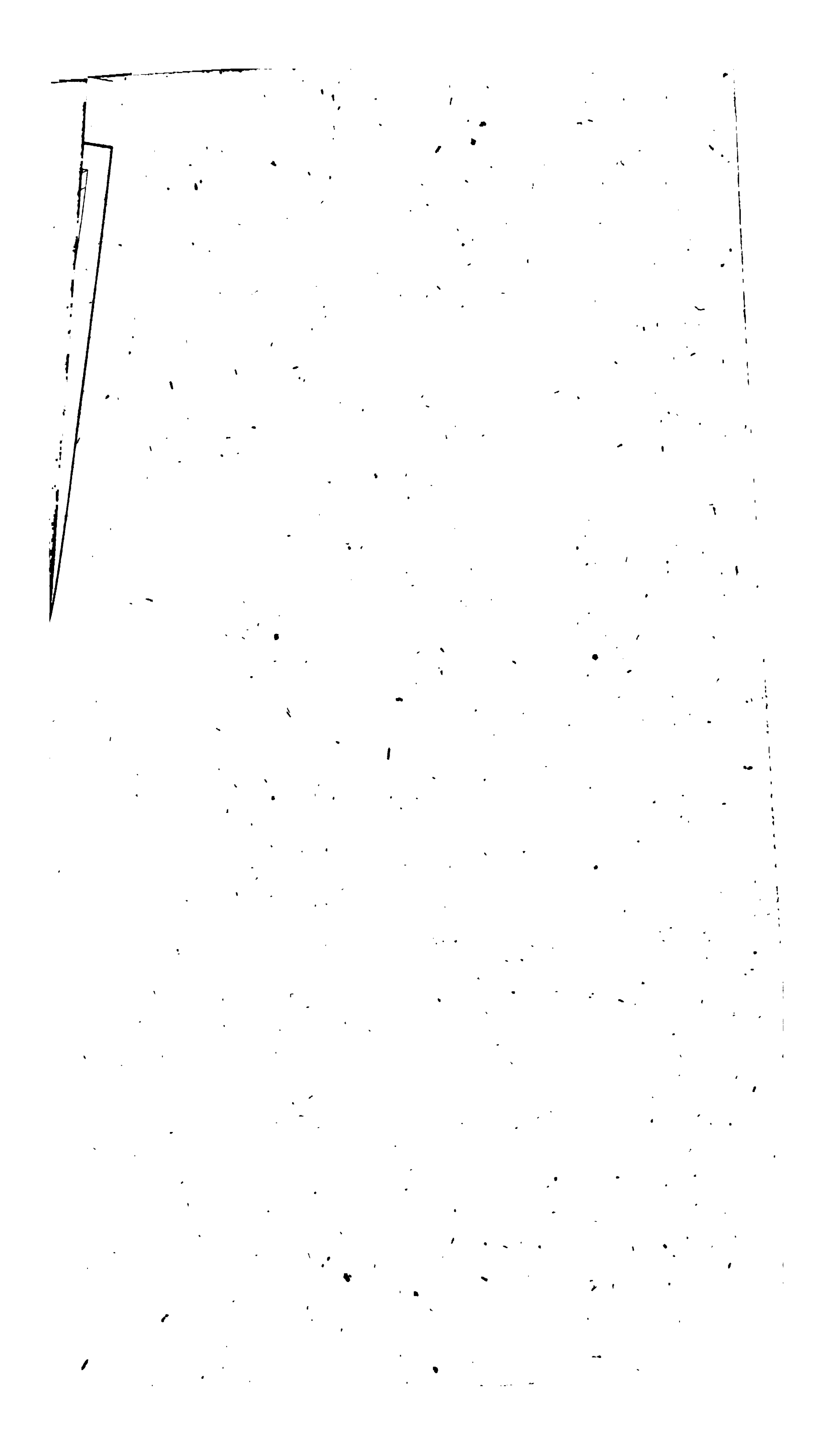


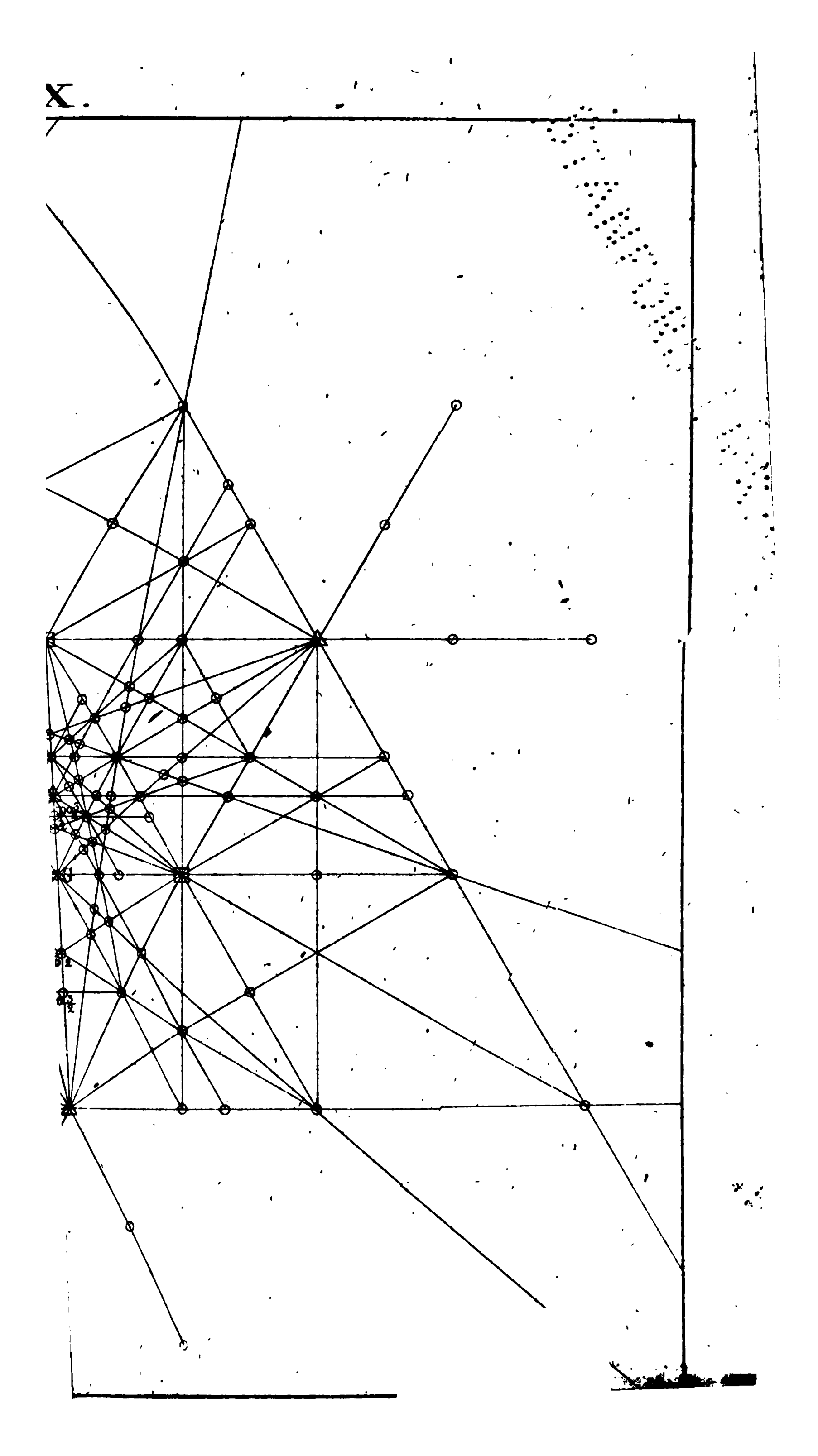


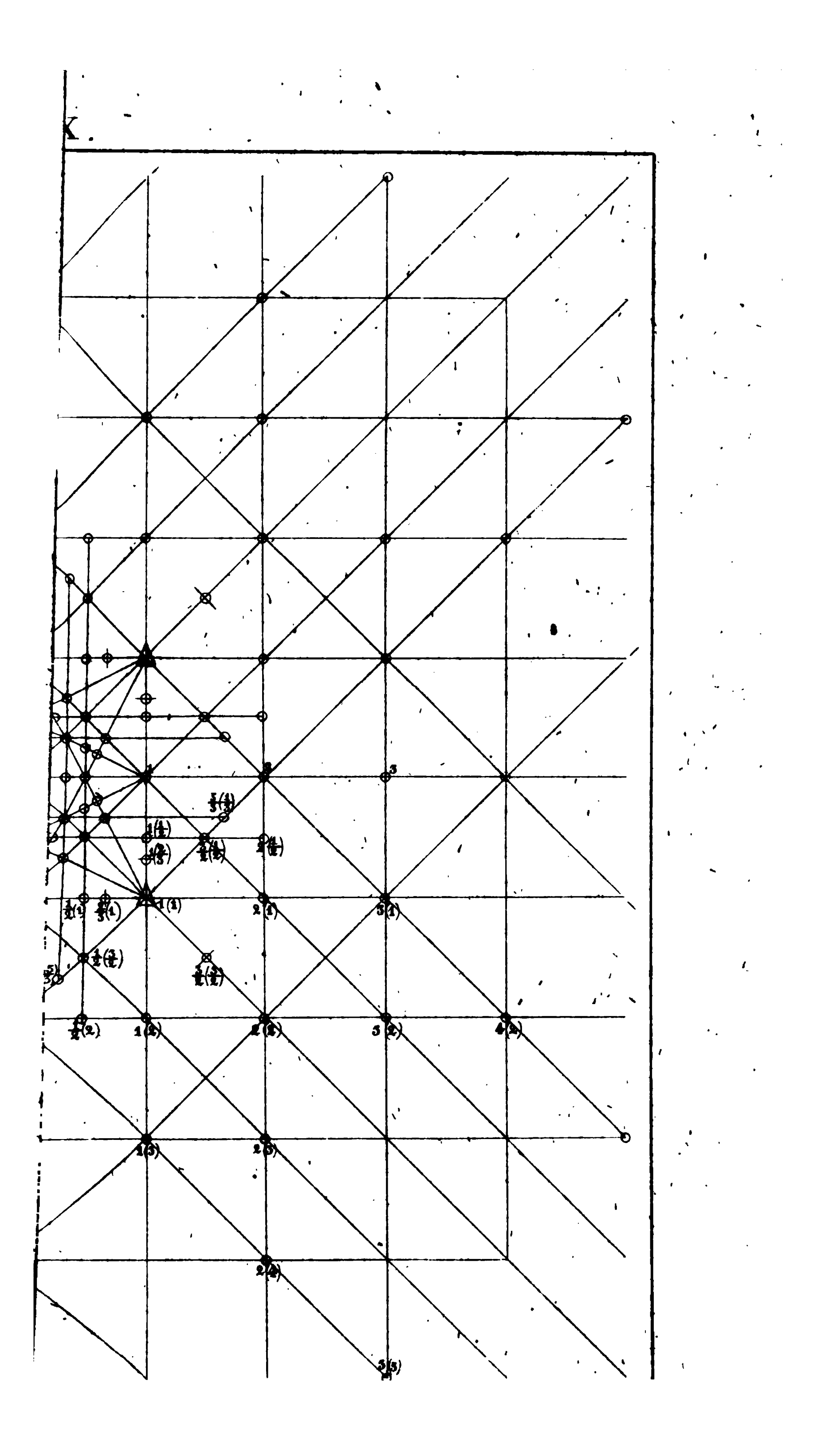


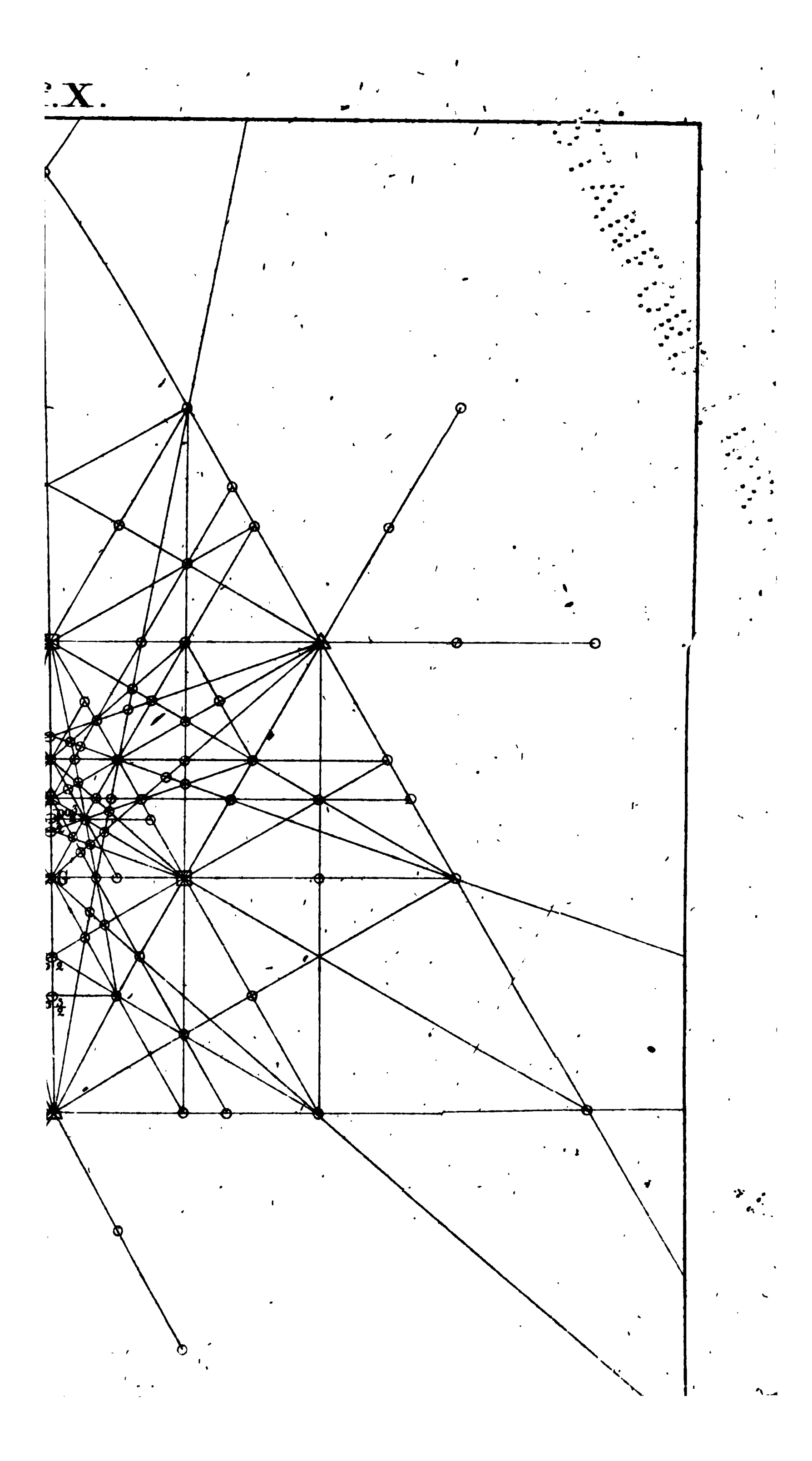












XI.

II

u v

o s

g M

n r

z

m

T

LS

Stanford University Library
Stanford, California

In order that others may use this book, please return it as soon as possible, but not later than the date due.

